

FORTSCHRITTE DER PHYSIK

HERAUSGEgeben IM AUFTRAGE DER PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT
IN DER
DEUTSCHEN DEMOKRATISCHEN REPUBLIK
VON RUDOLF RITSCHL UND ROBERT ROMPE

BAND 9 · HEFT 2/3 · 1961



A K A D E M I E - V E R L A G · B E R L I N

I N H A L T

Seite

M. KATO and G. TAKEDA: The Level Structure and Electromagnetic Structure of the Nucleon	57
P. MITTELSTAEDT: Quantenlogik	106

Die „FORTSCHRITTE DER PHYSIK“ sind durch den Buchhandel zu beziehen.
Falls keine Bezugsmöglichkeit durch eine Buchhandlung vorhanden ist, wenden
Sie sich bitte
in der Deutschen Demokratischen Republik
an den AKADEMIE-VERLAG, GmbH., Berlin W 8, Leipziger Straße 3—4
in der Deutschen Bundesrepublik
an die Auslieferungsstelle: KUNST UND WISSEN, Inhaber Erich Bieber,
Stuttgart S, Wilhelmstraße 4—6
bei Wohnsitz im Ausland
an den Deutschen Buch-Export und -Import, GmbH., Leipzig C 1, Post-
schließfach 276
oder direkt an den AKADEMIE-VERLAG, GmbH., Berlin W 8, Leipziger
Straße 3—4.

The Level Structure and Electromagnetic Structure of the Nucleon

MASAAKI KATO

Department of Physics, College of General Education, Tokyo University

GYO TAKEDA

Institute for Nuclear Study, Tokyo University, Tokyo

Contents

Preface	51
§ 1 The Level Scheme of the Nucleon	51
§ 2 Theory of the Excited Levels of the Nucleon	62
§ 3 Optical Property of the Nucleon	71
§ 4 Electromagnetic Structure of the Nucleon	78
§ 5 Theory of the Electromagnetic Structure of the Nucleon I — isovector part —	83
§ 6 Theory of the Electromagnetic Structure of the Nucleon II — isoscalar part —	93
§ 7 Concluding Remarks	100

Preface

The nucleon is not a simple point Dirac particle. Its extended electromagnetic structure, optical properties for the incoming pions and the existence of the unstable excited states have become known to us. In this paper we attempt to summarize the study on these properties of nucleons by the present field theory. Emphasis is on our physical understanding of them and any detailed mathematical points should be referred to the original papers.

The first three sections are concerned mostly with the pion-nucleon scattering phenomena and the excited levels of the nucleon. The next three sections are concerned with the electromagnetic structure of the nucleon. Some connections between the two phenomena are briefly discussed in the last section.

§ 1. The Level Scheme of the Nucleon

Atomic nuclei are known to have many excited levels well separated among each other, which are due to many different modes of excitation of the mutual motion between nucleons in the nuclei. On the other hand, being the lightest one among nuclei, the nucleon does not have such an excitation. However, the resonances were observed in the pion-nucleon scattering and the photo-pion production by nucleons, which must correspond to some kind of excitation of the nucleon structure. These are considered as due to internal excitation of the mesonic structure of the nucleon and such would be also present in other nuclei.

The experimental values of the total cross-section and elastic cross-section for the pion-nucleon scattering [1]—[29] and for the photo-pion production by nucleons [30]—[40] are shown in Fig. 1—Fig. 3. Existence of the three resonance states (N_1 , N_2 and N_3) is clearly seen. Their spin J , isotopic spin T , parity P , excitation energy W and level width Γ have been determined from the total cross-section and the angular distribution of π^\pm —p scatterings, the angular distribution

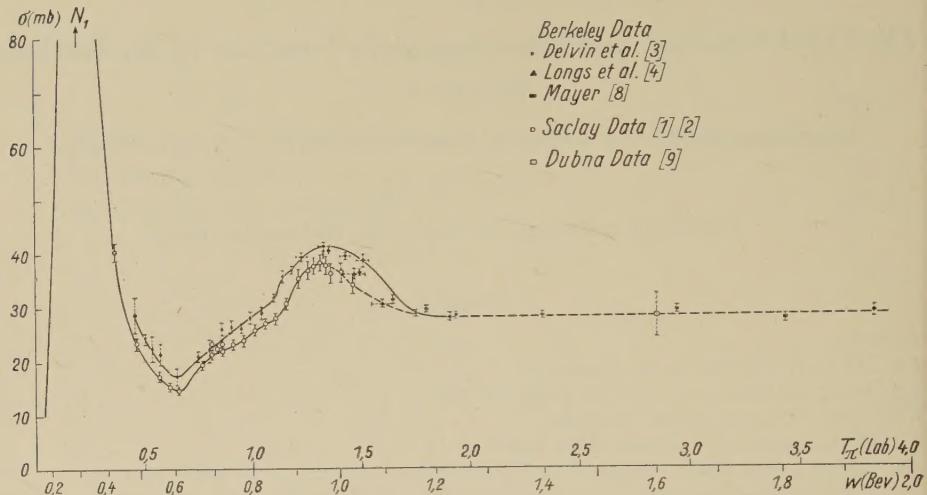


Fig. 1. The total $\pi^+ - p$ scattering cross-section as a function of the pion kinetic energy T_π . The low energy curve ($T_\pi \leq 350$ Mev) is taken from the review work of GELL-MANN and WATSON [4]. The high energy data ($T_\pi \geq 350$ Mev) are those of Berkeley group [3], [4], [8], Saclay group [1], [2] and Dubna group [9].

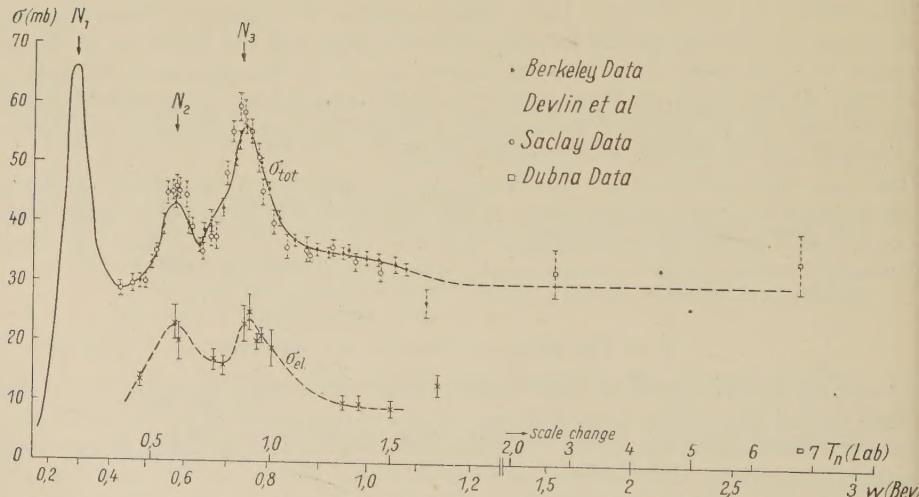
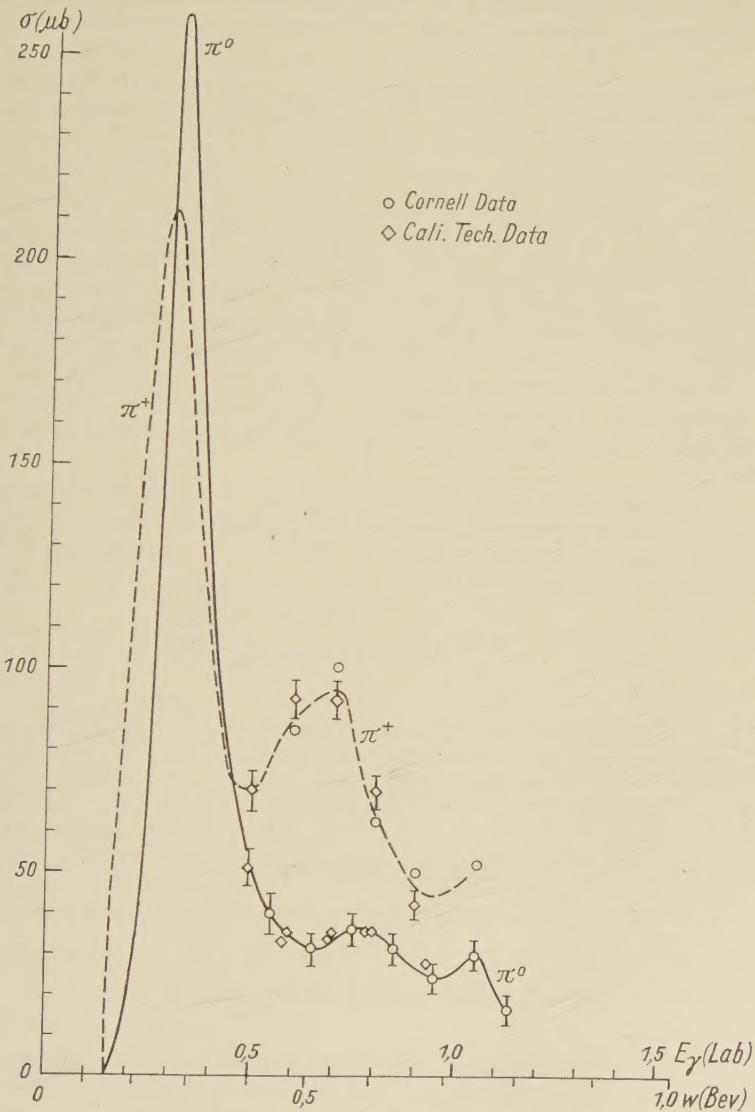


Fig. 2. The total $\pi^- - p$ scattering cross-section and the total $\pi^- - p$ elastic scattering cross-section as a function of the pion kinetic energy.

The data of the total cross-section are those taken from the same references with those of the $\pi^+ - p$ data. The data of the elastic cross-section are those summarized in ref. [2].

of pions produced in the photo-pion production by protons, the ratio of the elastic to total cross-section in the $\pi^\pm - p$ collisions and other phenomena. Table I contains these values determined by the experiments.



g. 3. The total cross-sections for the photo-pion production by protons [30] - [40]. The solid curve is for $\gamma + p \rightarrow n + \pi^0$ and the dotted one for $\gamma + p \rightarrow p + \pi^+$. The high energy data are those of Cornell and Cali. Tech. and taken from ref. [56].

Assignments of J and P for some of the levels are not well established and are given in parenthesis. The excitation energy W_i is equal to the centre-of-mass total energy of the pion-nucleon system at the resonance minus the nucleon rest energy. Since many states with different J and P contribute to the scattering at

Table I. Table of the values of spin J , isotopic spin T , parity P , excitation energy W , and level width Γ for the ground (N) and the excited states (N_1, N_2, N_3) of the nucleon.

	J	P	T	W_i (Mev)	Γ_i (Mev)
N	1/2	+	1/2	0	0
N_1	3/2	+	3/2	300	~ 140 Mev
N_2	3/2	(-)	1/2	573 ± 15	~ 140 Mev
N_3	(5/2)	(+)	1/2	740 ± 20	~ 100 Mev

the resonance energy, it is difficult to determine the energy where the cross-section in the resonating (J, P, T) state becomes maximum. The resonance energies W_2 and W_3 in Table I are taken from ref. [2] and are the energies where the $\pi^- - p$ total scattering cross-section becomes maximum. In order to determine the resonance energies more accurately it is necessary to make more accurate measurements on the pion angular distributions around the resonance energy and to separate the cross-section of the resonating (J, P, T) state from the rest of the cross section. The exceptional case is the first resonance, where the total $\pi^\pm - p$ cross-sections come almost from the resonating (3/2, 3/2) state. Therefore, W_1 was determined rather accurately.

The level width Γ is defined as the width of one level resonance formula of WIGNER and EISENBUD. BRUECKNER [42] proposed fitting the first resonance (N_1) cross-section to the one level resonance formula. The $\pi^\pm - p$ cross section in the first resonance state is given by

$$\sigma = 8\pi\lambda^2 \frac{(\Gamma_1/2)^2}{(W - W_1)^2 + (\Gamma_1/2)^2}, \quad (1)$$

where

$$\Gamma_1 = 2qa v_1(qa) \gamma_1^2 \quad \text{and} \quad v_1(qa) = \frac{(qa)^2}{1 + (qa)^2}.$$

According to GELL-MANN and WATSON [41] the best fit with experiments is obtained by, e. g.,

$$W_1 = 299 \text{ MeV (294 Mev)},$$

$$\gamma_1^2 = 58 \text{ MeV (75 MeV)},$$

$$a = 0.88 \times \frac{1}{\mu} \left(1.4 \times \frac{1}{\mu} \right).$$

Also the values quoted by BETHE and HOFFMANN [43] are given in parenthesis.¹⁾ In Eq. (1) W is the excitation energy of the pion and the nucleon, W_1 the resonance energy of N_1 and q the pion momentum all in the centre of the mass system. The γ_1^2 is the reduced width and a the interaction radius of the nucleon.²⁾

This type of the one level formula is not quite justified for the pion-nucleon scattering. The difficulty has to do with the small size of the interaction radius a , which appears to be an order of the pion Compton wave length μ^{-1} . Because the

¹⁾ Similar values were used by ANDERSON and METROPOLIS [44]. Also see [46], page 196.

²⁾ In this paper the units $\hbar = c = 1$ are used throughout.

pions must be treated in a relativistic way and they are not to be localized within a radius of an order of μ^{-1} (See ref. [48]). Inspite of this fact the agreement of Eq.(1) with the experimental results is exceedingly good. The reduced width γ_π^2 is of an order of the Wigner limit $(\mu a^2)^{-1} \approx 110$ Mev (70 Mev), which is consistent with the validity of the one level formula. The value of Γ_1 in Table I is one evaluated at $W = W_1$.

For the second (N_2) and third (N_3) resonances the resonance parts of cross-section have not been separated accurately until present time. Here we shall tentatively use the ones given in ref. [6] and try to fit them by one level resonance formula. The main difference from the case of N_1 is that here the width Γ is a sum of the two parts, the elastic width Γ_{el} and the inelastic pion-production width Γ_{inel} . The energy is enough to produce more than one pion, but such cross-sections are small and neglected. The resonance cross-section at the resonance energy determines the ratio $\Gamma_{\text{el}}/\Gamma$ and therefore the ratio $\gamma_\pi^2/\gamma_{2\pi}^2$ of reduced widths. Then the apparent width of the experimental cross-section curve is used for determining $\gamma_{2\pi}^2$. The one level formula for the second resonance ($T = 1/2, J = 3/2, P = -1$) is similar to Eq. (1).¹⁾

$$\sigma = 8\pi \lambda^2 \frac{(\Gamma_{\text{el}}^{(2)}/2)(\Gamma_2/2)}{(W - W_2)^2 + (\Gamma_2/2)^2}, \quad (2)$$

where

$$\Gamma_2 = \Gamma_{\text{el}}^{(2)} + \Gamma_{\text{inel}}^{(2)}, \quad \Gamma_{\text{el}}^{(2)} = \Gamma_\pi^{(2)}, \quad \Gamma_{\text{inel}}^{(2)} \approx \Gamma_{2\pi}^{(2)},$$

$$\Gamma_{\text{el}}^{(2)} = 2qa v_2(qa) \gamma_\pi^2,$$

$$\Gamma_{\text{inel}}^{(2)} = \gamma_{2\pi}^2 \cdot (ma/\mu^2) \int d\mathbf{q}/\omega \gamma'(\omega),$$

¹⁾ The elastic width Γ_π is equal to $2\pi|M|^2\varrho_w$, where M is the matrix element for the transition of the resonant state decaying into the pion and nucleon and ϱ_w the final state density. We assume that M can be expressed as follows: $M = G [4\pi(m/2\omega E) v_2(qa)]^{1/2}$, where ω and q are the pion energy and momentum, m and E the nucleon mass and energy, and G a constant independent with W . The appearance of the factor $(m/2\omega_q E_q)^{1/2}$ is equivalent to take Γ as proportional to the product of the penetration factor $v_2(qa)$ times the modified final state density, where the Lorentz invariant phase space volume $d\mathbf{q}/\omega$ or $d\mathbf{p}/E$ is used instead of $d\mathbf{q}$ or $d\mathbf{p}$. Here E and \mathbf{p} are the energy and momentum of the nucleon and $\mathbf{p} + \mathbf{q} = 0$. The width Γ_π thus calculated is $(G^2/a) \frac{m}{m+w} 2qa \cdot v_2(qa)$ and we obtain $\gamma_\pi^2 \approx (G^2/a) \frac{m}{m+w_2}$. The inelastic width $\Gamma_{2\pi}$ is calculated in a similar way. Assuming $M = (4\pi G'/\mu) [(m/4\omega\omega'E) v_1(q'a)]^{1/2}$, we obtain

$$\Gamma_{2\pi} = (2\pi)^{-3} G'^2 (m/\mu^2) \int (d\mathbf{q}/\omega) (d\mathbf{q}'/\omega') (d\mathbf{p}/E) \delta(\mathbf{q} + \mathbf{q}' + \mathbf{p}) \delta(\omega + \omega' + E - m - W) v_1(q'a).$$

This can be rewritten as $\Gamma_{2\pi} = (2\pi)^{-3} G'^2 (m/\mu^2) \int (d\mathbf{q}/\omega) \gamma'(\omega)$, with

$$\gamma'(\omega) = \int (d\mathbf{q}'/\omega') (d\mathbf{p}/E) \delta(\mathbf{p} + \mathbf{q} + \mathbf{q}') \delta(\omega + \omega' + E - m - W) v_1(q'a).$$

The $\gamma'(\omega)$ is proportional to the width of the excited nucleon decaying into the p-wave pion (\mathbf{q}', ω') and nucleon (\mathbf{p}, E) after it emitted the s-wave pion (\mathbf{q}, ω) .

Since no customary definition of the reduced width $\gamma_{2\pi}^2$ for the inelastic pion production process exists, we use $\gamma_{2\pi}^2 = (2\pi)^{-3} G'^2/a$ as its definition.

with

$$v_2(qa) = \frac{(qa)^4}{9 + 3(qa)^2 + (qa)^4},$$

$$\gamma'(\omega) = \int \frac{d\mathbf{q}'}{\omega'} \frac{d\mathbf{p}}{E} \delta(\mathbf{p} + \mathbf{q} + \mathbf{q}') \delta(E + \omega + \omega' - W - m) v_1(q'a).$$

A reasonable fit with the experiment is obtained by taking, e. g.,

$$W_2 = 575 \text{ Mev}, \quad a = 0.88 \times \frac{1}{\mu}, \quad \gamma_\pi^2 = 37 \text{ Mev}, \quad \gamma_{2\pi}^2 = 32 \text{ Mev}.$$

These correspond to take $\Gamma_2 = 140 \text{ Mev}$, $\Gamma_{\text{el}}^{(2)} / \Gamma_2 = 0.672$ and $\sigma = 32 \text{ mb}$ at $W = W_2 (= 575 \text{ Mev})$. The inelastic width is proportional to the product of the final state's phase space volume times the penetration factor of the p-wave pion emitted hereby assuming that the one of the emitted pions is in s-state and the other in p-state.¹⁾ In order to avoid an enormously rapid increase of $\Gamma_{2\pi}^{(2)}$ with W , the phase space volume in the momentum space is taken as proportional to the relativistic invariant quantity $d\mathbf{q}/\omega_q$ instead of $d\mathbf{q}$. The real energy dependence of $\Gamma_{2\pi}^{(2)}$ is known neither experimentally nor theoretically.

We have also made a similar calculation for the third resonance. In this case both pions emitted in the inelastic process are mainly in p-state and $\Gamma_{2\pi}^{(3)}$ is calculated in taking account the penetratton factors for the two p-wave pions. The one level formula for the third resonant scattering ($J = 5/2$, $P = +1$, $T = 1/2$) is

$$\sigma = 12\pi\lambda^2 \frac{(\Gamma_{\text{el}}^{(3)}/2)(\Gamma_3/2)}{(W - W_3)^2 + (\Gamma_3/2)^2}, \quad (3)$$

$$\Gamma_3 = \Gamma_{\text{el}}^{(3)} + \Gamma_{\text{inel}}^{(3)}, \quad \Gamma_{\text{el}}^{(3)} = \Gamma_\pi^{(2)}, \quad \Gamma_{\text{inel}}^{(3)} \approx \Gamma_{2\pi}^{(3)},$$

$$\Gamma_\pi^{(3)} = 2qa v_3(qa) \gamma_\pi^2,$$

$$\Gamma_{2\pi}^{(3)} = \gamma_{2\pi}^2 (ma/\mu^2) \int (d\mathbf{q}/\omega) \gamma'(\omega) v_1(qa),$$

with

$$v_3(qa) = \frac{(qa)^6}{225 + 45(qa)^2 + 6(qa)^4 + (qa)^6}.$$

A reasonable fit is obtained by taking, e. g.,

$$W_3 = 743 \text{ Mev.}, \quad a = 0.88 \times 1/\mu, \quad \gamma_\pi^2 = 28 \text{ Mev}, \quad \gamma_{2\pi}^2 = 25 \text{ Mev},$$

which corresponds to take $\Gamma_3 = 100 \text{ Mev}$, $\Gamma_{\text{el}}^{(3)}/\Gamma_3 = 0.795$ and $\sigma = 36 \text{ mb}$ at $W = W_3 (743 \text{ Mev})$.

In Fig. 4 we plot the theoretical curves of the total and inelastic resonant cross-sections for N_2 and N_3 and compare them with the total resonant cross-sections of ref. [6].²⁾

¹⁾ The nucleon is treated as extremely heavy, which allows us this assigment of the orbital angular momenta for the pions.

²⁾ Since the positions of the resonances in [6] are higher than those listed in Table I, the theoretical curves in Fig. 4 are shifted to low energy side from the ones of [6].

Since no experimental curves for the inelastic cross-section are available, the energy dependence of $\Gamma_{2\pi}$ cannot be checked at present time. At the resonance energy where the phase shift becomes $\pi/2$, the total and the elastic cross-sections in the resonant J -state are related with each other by

$$(\sigma_{\text{tot}})_J = 2\pi(2J+1) \lambda_r^2 \left(\frac{\sigma_{\text{el}}}{\sigma_{\text{tot}}} \right)_J, \quad (4)$$

where the $(\sigma_{\text{tot}})_J$ and $(\sigma_{\text{el}})_J$ are the total and elastic cross-sections in the (T, J, P) state and λ_r the pion wave length all at the resonance energy. The relation is

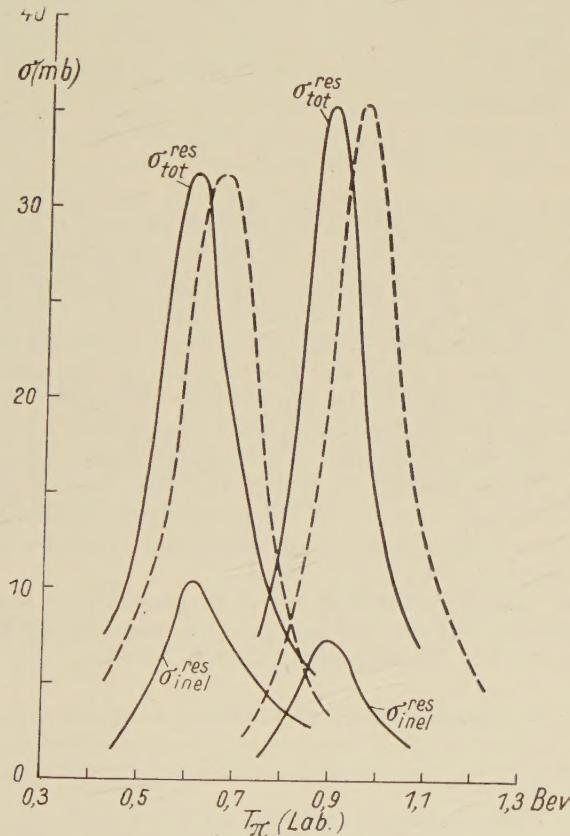


fig. 4. The solid curves are the theoretical curves of the total and inelastic resonant cross-sections for N_2 and N_3 obtained by the one level formulas (2) and (3). The dotted curves are the experimental ones obtained in ref. [6].

generally valid and, of course, also does follow from the one level formula such as Eqs. (1), (2), and (3). The resonance cross-sections at $W = W_i$ and $2\pi(2J+1)\lambda_r^2$ for various values of J are given in Table II.

The experimental values of the elastic $\pi^- - p$ scattering cross-section are given in fig. 2 [10] — [29]. They are identical with σ_{tot} below the pion production threshold ($W = 2\mu$) and practically coincide with σ_{tot} for $T_\pi \lesssim 400$ Mev. There is little

Table II. Table of the measured total cross-section at $W = W_i$ in the resonant (T, J, P) state and the calculated values of $2\pi(2J+1)\lambda_r^2$ for various J values.

	$(\sigma_{\text{tot}})_J$	$2\pi(2J+1)\lambda_r^2$	W_i
N_1	$\sim 200 \text{ mb}$	$182 \text{ mb } (J = 3/2)$	300 Mev
N_2	$\sim 32 \text{ mb}$	$\begin{cases} 47.6 \text{ mb } (J = 3/2) \\ 71.4 \text{ mb } (J = 5/2) \end{cases}$	575 Mev
N_3	$\sim 36 \text{ mb}$	$\begin{cases} 45.3 \text{ mb } (J = 5/2) \\ 60.4 \text{ mb } (J = 7/2) \end{cases}$	743 Mev

information [26]–[28] on the elastic $\pi^+ - p$ scattering cross-sections in the high energy region where the total cross-section deviates substantially from the elastic ones. The experimental values $(\sigma_{\text{tot}})_J$ in Table II give us the lowest possible value of J from the inequality

$$(\sigma_{\text{tot}})_J \leq 2\pi(2J+1)\lambda_r^2. \quad (5)$$

Namely, $J \geq 3/2$ for N_1 and N_2 and $J \geq 5/2$ for N_3 . The ratio $(\sigma_{\text{el}}/\sigma_{\text{tot}})_J$ together with $(\sigma_{\text{tot}})_J$ can in principle determine the value J uniquely from Eq. (4). Unfortunately at present the measured ratio is not the one for the resonant state but the one averaged over many states participating in the scattering. The exception is the first resonance, where $(\sigma_{\text{el}}/\sigma_{\text{tot}})_J = 1$ and we obtained $J = 3/2$.

The angular distribution of pions in the pion-nucleon scattering and in the photo-pion production also give $J = 3/2$ and $P = +1$ for N_1 . The values $J = 3/2$ and $P = -1$ for N_2 are first suggested by WILSON [50] and mainly due to the angular distribution of π^0 and the polarization of the recoil protons in the photo- π^0 production by nucleons [50]–[55], [38]. The angular distribution of pions in the $\pi^- - p$ scattering also favours this choice [29]. There has been no conclusive experiments to determine J and P for N_3 , but the interference effect between N_2 and N_3 observed in the scatterings and the photo-pion productions seems to favour the choice $J = 5/2$ and $P = +1$.

Thus it seems that the assignment of spin J for the resonant state is the lowest possible one allowed by Eq. (5). If J is larger than that, Eq. (4) predicts a rather small ratio $(\sigma_{\text{el}}/\sigma_{\text{tot}})_J$; e. g., for N_2 and $J = 5/2$.

$$(\sigma_{\text{el}}/\sigma_{\text{tot}})_J \approx 32 \text{ mb}/71.4 \text{ mb} \approx 0.45 \quad (0.7)$$

and for N_3 and $J = 7/2$

$$(\sigma_{\text{el}}/\sigma_{\text{tot}})_J \approx 36 \text{ mb}/60.4 \text{ mb} \approx 0.6 \quad (0.8).$$

On the other hand the ratio must be larger or equal to $1/2$ at the resonance point.¹⁾ The values in parentheses are those for N_2 , $J = 3/2$ and N_3 , $J = 5/2$, respectively. Thus the magnitude of the resonant cross-section alone is a powerful tool for determining J , if it can be measured with reasonable accuracy. At moment it is obtained by subtracting the non-resonant part of the cross-section from the total one and might be subject to large errors.

¹⁾ From Eq. (15) in §3 we obtain $(\sigma_{\text{el}}/\sigma_{\text{tot}})_l = \frac{1 + \eta_l}{2} \geq 1/2$ at the resonance point $\delta_l = \pi/2$.

The parity of the resonant state is determined from the angular distribution of pions in the pion-nucleon scattering or the photo-pion production and the polarization of the recoil protons [38] in $\gamma + p \rightarrow p + \pi^0$. The parity is not yet certain [56] for N_2 and N_3 , but the assignments given in Table I are rather favourable. So far we have discussed those resonances which are established experimentally. There could be higher resonances unknown to us.

In particular the broad bump of the $\pi^+ - p$ total cross-section around $T_\pi = 1.3$ Bev may contain one or a few resonance levels. In fact CARRUTHERS [57] pointed out a possible occurrence of resonance with $T = 3/2$ at about $T_\pi = 850 - 950$ Mev. The reason is the rapid increase of the $\pi^- - p$ total cross section above 800 Mev and the small and rapidly decreasing charge exchange $\pi^- - p$ cross-section in the 500–800 Mev region. The similarity between the $\pi^- - p$ cross-section from 0.6 to 1.0 Bev with the $\pi^+ - p$ cross-section between 0.8 to 1.2 Bev was emphasized [58], although the latter is effected much by a tail of the broad peak at about 1.3 Bev. It is our opinion that the experimental results on the charge exchange scattering are uncertain and a rapidly increasing but non-resonant $T = 3/2$ and $d_{3/2}\pi^+ \pm p$ scattering would be enough to explain the cross-section around $T_\pi = 0.9$ Bev.

Nevertheless there is certainly a possibility for finding one or more resonant states with $T = 3/2$ in the region $T_\pi = 0.85 \sim 1.5$ Bev, and such would have a rather large width. For example, if the $T = J = 3/2$, $P = -1$ phase shift δ should come down eventually to 0 above the N_1 resonance, it would pass again $\delta = \pi/2$. This anti-resonance would give a broad peak [59], [60] and possibly at the energy region we are discussing.

Resonance behaviours of the photo-pion production cross-section have played important role in determining the property of the nucleon resonance states and the γ -ray widths of the levels are themselves important for knowing the charge-current distributions in those states. The one level resonance formula was also applied to the N_1 state excitation by photons: for $\gamma + p \rightarrow p + \pi^0$

$$\sigma_{\gamma-\pi^0} = \frac{8\pi}{\nu^2} \cdot \frac{(\Gamma_\gamma^{(1)}/2)(\Gamma_1/2)}{(W-W_1)^2 + (\Gamma_1/2)^2}, \quad (6)$$

with

$$\Gamma_\gamma^{(1)} = f_\gamma^{(1)} \cdot 2a\nu v_1(a\nu).$$

Here ν is the photon energy in the centre of the mass system, a the channel radius, and f_γ the reduced width for the γ -ray emission of the N_1 state. The energy dependence of Γ_γ is that of the M_1 transition and the N_1 excitation by $E2$ transition was neglected [46].¹⁾

A reasonable fit with the experiments was obtained by

$$f_\gamma^{(1)} = 0.07 \text{ Mev}, \quad a = 0.88 \frac{l}{\mu}.$$

For $\gamma + p \rightarrow n + \pi^+$ the resonant cross-section is one half of Eq. (6) as is required from $\Delta T = 1$.

¹⁾ In this paper we assume the ordinary energy dependence $\Gamma_\gamma \propto \nu^{2l+1}$ for the magnetic l -pole radiation and $\Gamma_\gamma \propto \nu^{2l-1}$ for the electric l -pole radiation.

Similar one level formula for $\gamma + p \rightarrow p + \pi^0$ can be also applied for the second resonance¹⁾;

$$\sigma_{\gamma-\pi^0} = \frac{4\pi}{v^2} \frac{(\Gamma_\gamma^{(2)}/2)(\Gamma_\pi^{(2)}/2)}{(W-W_2) + (\Gamma_2/2)^2}, \quad (7)$$

with

$$\Gamma_\gamma^{(2)} = 2avf_\gamma^{(2)}.$$

The separation of the resonant part of the photo- π^0 production cross-section has not yet been done in an unambiguous way. If we assume the resonant cross-section is $60 \mu b$ for $\sigma_{\gamma-\pi^+}$ at $W = W_2$, then we obtain

$$f_\gamma^{(2)} = 0.07 \text{ Mev.}$$

Although the same radius a is used for $\Gamma_\gamma^{(2)}$ with that for $\Gamma_{\text{el}}^{(2)}$, there is no a priori reason for it. Also f_γ could be energy dependent. The photo- π^0 production amplitude²⁾ in the one level resonance formula (7) can be expressed as

$$\sqrt{\frac{\Gamma_\gamma^{(2)}}{\Gamma_{\text{el}}^{(2)}}} \frac{\eta \exp 2i\delta - 1}{\sqrt{2vq}} \frac{3(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{q})(\mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) - q^2(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon})}{2q^2}. \quad (8)$$

The $\Gamma_\gamma^{(2)}$ and $\Gamma_{\text{el}}^{(2)}$ are given by Eq. (7) and Eq. (2), respectively. The δ is the phase shift and η the magnitude of the elastic channel amplitude in the corresponding pion-nucleon scattering. This form of the amplitude is obtained by assuming that the amplitude is proportional to the wave function of the final π -nucleon state at the surface of the nucleon. Thus the energy dependence of the $\gamma - \pi$ production cross-section depends not only on the phase shift δ but also on η . The value of η would be very energy dependent around $W = W_2$ and important for determining the shape of the resonant cross-section. The energy dependence of η , which can be derived from $(\sigma_{\text{inel}})_J$, is not known in good accuracy.

No very pronounced peak of the photo-pion production was found at $W = W_3$. This would be presumably due to small $E2$ and $M3$ moments of the nucleon for the transition $\gamma + N \rightarrow N_3$ [52]. Some theoretical models of the N_3 resonance predict the small moments, assuming N_3 to be a $f_{5/2}$ state [61]. Therefore, we do not attempt here to discuss the one level resonance formula for the photo-excitation of N_3 .

Finally we shall mention the maximum observed in the $\Lambda - K^0$ production by $\pi^- - p$ scatterings [64]. The maximum energy seems to be identical with W_3 as is

¹⁾ Such an application was first made by WILSON [50].

²⁾ BERNARDINI [56] has employed the following photo- π^0 production amplitude for the second resonance based on Watson's remark on final state interaction;

$$-iefC\mu^2 \exp i\delta \sin \delta [3(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{q})(\mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}) - q_2(\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon})]q^{-5},$$

where C is taken as constant and equal to about 11. When $\eta = 1$ and $(va), (qa) \ll 1$, this becomes identical with Eq. (8). In that case

$$C = -\frac{3}{2} \frac{1}{ef} \cdot \frac{1}{(a\mu)^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{va}} \sqrt{\frac{f_\gamma}{\gamma^2}}.$$

Eq. (8) would have more general validity than the above equation.

shown in Fig. 5. Since the $\Lambda - K^0$ system has $T = 1/2$, natural explanation would be to identify this with N_3 [65], [61].

If $J = 5/2$ and $P = +1$ for N_3 , the relative angular momentum between K and Λ is large $l = 3$ when the $\Lambda - K^0$ parity is odd and $l = 2$ for the even parity. The value of W_3 is slightly larger than the threshold energy of $\Lambda - K^0$ production ($W = 675$ Mev) and the observed production cross-section is of an order of a percent of σ_{tot} . One might think that the centrifugal barrier effect upon the relative

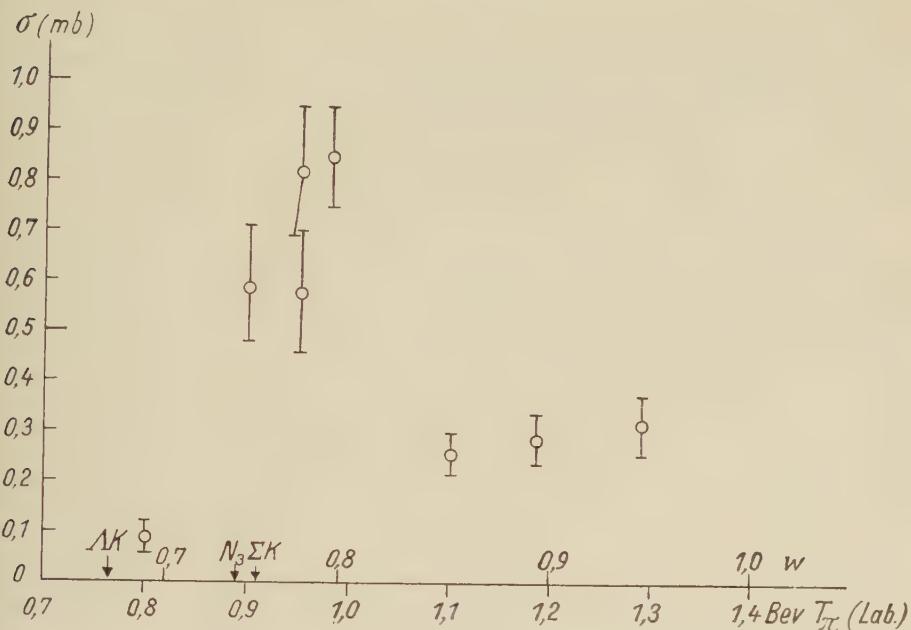


Fig. 5. The $\Lambda - K^0$ production cross-section [64] by $\pi^- - p$ collisions as a function of the pion kinetic energy T_π . The threshold energies of the ΛK^0 and ΣK production and the resonance energy of N_3 are indicated.

motion of the produced Λ and K^0 would damp the $\Lambda - K^0$ production considerably. Actually the value of the relative $K^0 - \Lambda$ momentum q_K is not very small ($q_K \approx 1.7\mu$) already at $W = W_3$ and the barrier effect depends much on choice of the nucleon radius a . The experimentally observed ratio of the cross-sections, $\sigma_{\pi p \rightarrow \Lambda K^0} / \sigma_{\text{tot}} \approx 10^{-2}$ is not unreasonable for proper choice of a .

If we use one level formula, the ratio of $\sigma_{\Lambda K^0}$ to the elastic cross-section is (for the odd parity of $\Lambda - K^0$)

$$\frac{\sigma_{\Lambda K^0}}{\sigma_{\text{el}}} = \frac{\Gamma_{\Lambda K}}{\Gamma_{\text{el}}} = \frac{\gamma_K^2}{\gamma_\pi^2} \cdot \frac{q_K}{q_\pi} \frac{v_3(q_K a)}{v_3(q_\pi a)}, \quad (9)$$

where γ^2 is the reduced width and $v_3(aq)$ the penetration factor. The experimental value of the ratio is about 1/40 at $W = W_3$, if σ_{el} is estimated from $(\sigma_{\text{tot}})_J \approx 36 \text{ m.b.}$

For three different choices of a we shall give the ratio γ_K^2/γ_π^2 :

$$\gamma_K^2/\gamma_\pi^2 \approx \begin{cases} 0.2 & \left(a = \frac{1}{\mu}\right) \\ 1.2 & \left(a = 0.88 \times \frac{1}{\mu}\right) \\ 4.6 & \left(a = 0.5 \times \frac{1}{\mu}\right). \end{cases}$$

The ratio depends very sensitively on the choice of a . Furthermore no a priori reason exists for choosing the same a for the two reactions. In spite of this uncertainty, a large γ_K^2/γ_π^2 would suggest that the $\Lambda - K^0$ interaction may be important for understanding the cause of the N_3 resonance.

§ 2. Theory of the Excited Levels of the Nucleon

There has been no general description of the excited levels of the nucleon or the resonant pion-nucleon scatterings and photo-pion productions. Also very little progress has been made in understanding the observed excited states within the framework of the relativistic field theory. Most of the discussions on them have been done based on the static pion theory, to which we shall mostly restrict ourselves.

Before going to discuss the static theory of the resonance states, we make two brief comments on the relativistic aspects of the pion-nucleon resonances.

The first one is on an attempt by SACKS [48] to generalize Wigner-Eisenbud general formalism [66] of the nuclear resonance reactions and apply for the pion-nucleon scatterings. The differences from the nuclear resonance theory are as follows; since pions must be treated relativistically in the region of their interaction with the nucleon and cannot be localized within a distance smaller than the pion Compton wave length, we cannot separate two regions, the outer and inner region of the nucleon, by a sharp boundary. This difficulty is very essential, because the size of the nucleon is also of an order of the pion Compton wave length.

Instead of defining a sharp boundary, Sachs proposed to divide a pion wave function into a set of bound state wave functions $\varphi(b = 1, 2, \dots)$ and of unbound state ones. Both together make a complete orthonormal set of wave functions. Each φ_b should be a rapidly decreasing function at a distance beyond the nucleon radius and the wave function of the ground state of the nucleon should be described only by the set of φ_b . An eigenstate χ_2 of the system composed of the nucleon and φ_b field corresponds to a resonance state, although the resonance energy is shifted from the eigen energy of χ_2 by the coupling of unbound fields with the nucleon and φ_b . The pion-nucleon scattering cross-section does not depend on the way of dividing the pion field into the two parts, just as Wigner-Eisenbud level formula is independent from choice of the radius of the surface. However, when one computes the resonance energy, width, and others in certain approximation, results would depend much on choice of φ_b . The pion-nucleon scatterings in the strong coupling theory and the Tomonaga's intermediate coupling theory are just the examples of this kind of approach, both predicting the presence of the N_1 resonance¹⁾ [67],

¹⁾ Some doubts were expressed for the validity of the intermediate coupling treatment [69].

[68]. A resonance formula obtained is similar to the Wigner-Eisenbud formula, but it is not easy to find an approximation containing relativistic characteristics in it and say more than what we can do from the static theory. The second remark on the relativistic character of the nucleon resonances concerns with the dispersion relation. In the ordinary theory of the nuclear reactions levels with different angular momentum and parity are more or less independent. On the other hand in the case of nucleon's resonances the causality principle requires certain correlations among levels with different J and P . We shall discuss these correlations by an illustrative way rather than by writing down the dispersion relation.

The pion-nucleon scattering is illustrated [70] in Fig. 6 as the pion wave packet colliding with the nucleon of a radius R .¹⁾ The wave packet has a finite extension both in the direction of its propagation (z -direction) and the directions perpendicular to it. Suppose that there occurs an absorption of a particular partial wave (with orbital angular momentum l_0)²⁾ when the front of the incoming wave packet ψ_{in} passes over a point A (or a small region A) in the nucleon. Then unless some other changes accompany, the pion wave function changes suddenly into $\psi_{in} - \alpha \psi_{l_0}$ after the absorption. The incoming pion packet ψ_{in} is a superposition of partial waves with different l ($\psi_{in} = \sum_l \beta_l \psi_l$) for being of finite extension in all directions. The change $\beta_{l_0} \rightarrow \beta_{l_0} - \alpha$ would be only a phase change ($\beta_{l_0} - \alpha = \beta_{l_0} \exp 2i\delta_{l_0}$) if the absorption is due to the elastic scattering or a real absorption of the l_0 -partial wave ($|\beta_{l_0} - \alpha| < |\beta_{l_0}|$) if it is due to the inelastic scattering. In either cases the probability for finding a pion at a point x is

$$|\psi_{in}(x)|^2 = 2 \operatorname{Re} (\psi_{in}^*(x) \alpha \psi_{l_0}(x)) + |\alpha|^2 |\psi_{l_0}(x)|^2. \quad ^{3)}$$

Since the $\psi_{l_0}(x)$ is non-zero in all directions from the centre of the nucleon except possibly a few directions, we find that the pion propagated at least by a distance $2a$ in an infinitesimally small time interval right after the absorption. The point A is an arbitrary point in the nucleon and thus a can be any value between 0 and R . This propagation certainly contradicts with the causality principle except only when $R = 0$. Therefore, some other changes of the wave packet should occur at the same time to eliminate $\alpha \psi_{l_0}(x)$ everywhere except the region which $\psi_{in}(x)$ originally occupied. This requires all the partial waves to change and they will, in fact, receive a phase change in such a way to satisfy the requirement.⁴⁾

By using the dispersion relations with a finite momentum transfer the effects of the N_1 -resonance ($l = 1$) on the s-wave [72] and d-wave [73] phase shifts were

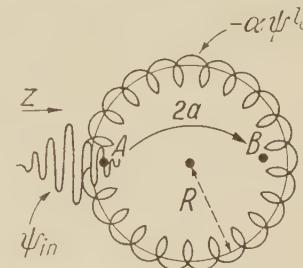


Fig. 6. Scattering of a pion wave packet by a nucleon with a range R . If an absorption of the incident wave packet occurs at a point (or a small region) A for the l_0 partial wave, ψ_{in} changes into $\psi_{in} - \alpha \psi_{l_0}$. Unless other partial waves receive adequate phase changes at the same time, the wave propagates a distance $2a$ ($\leq 2R$) in an infinitesimally small time.

¹⁾ The radius R is the range of the pion-nucleon interaction, beyond which the pion does not effectively interact with the nucleon.

²⁾ Even if we consider the spin of the nucleon, the following argument will not change.

³⁾ If the absorption is that of the $l = 1, j = 3/2$ resonant partial wave, $|\psi_{l_0}(x)|^2 \propto 1 + 3 \cos^2 \theta$.

⁴⁾ This kind of illustrative discussion of the dispersion relation was made by TOLL [71] for the forward scattering dispersion relation.

computed. The $T = 1/2, d_{11}$ phase shift thus calculated is small and no intimate correlation between N_1 and N_2 resonances have been seen. Nevertheless such a correlation has not been thoroughly studied and would be very important for understanding the nucleon's level structure. The range R of the main pion-nucleon force is $R \lesssim 1/2m$ for $l = 1$ and this is smaller than the pion wave length at the first resonance. On the other hand if the pion-pion interaction is important for the N_2 and N_3 resonances, the range R would be $R \lesssim 1/2\mu$ indicating $R > \lambda_2$ and λ_3 . Therefore, the nucleon looks nearly like a point for incoming pions at N_1 and deviates significantly from a point for pions at the higher resonances. Thus the intercorrelations between the N_2 and N_3 resonances through the causality requirements will be more intimate and would be very interesting to look into.

Static theory of the excited states of the nucleon

Hereafter we shall limit our discussions to the static theory of the pion-nucleon system, where nucleons are treated as very heavy.

A) The first excited state (N_1)

The study of the first resonance N_1 in the framework of the static pion theory has been extensively worked out, in particular, by CHEW, LOW and their collaborators [74] and they are summarized nicely by CHEW [75] and WICK [76]. Here we shall discuss mainly on our understanding of physical reasons for the occurrence of N_1 resonance.

The perturbation calculation for the p-wave pion-nucleon scattering (Fig. 7) give the phase shifts δ_i of the three p-wave scatterings

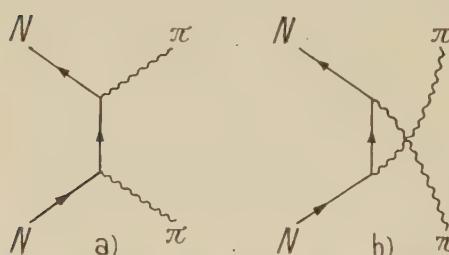


Fig. 7. The lowest order Feynman graphs of the pion-nucleon scattering.

$$\operatorname{tg} \delta_i(\omega) = \frac{q^3 u^2(q^2)}{\omega} \lambda_i \quad (10)$$

where

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \frac{2f^2}{3} \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ +2 \end{pmatrix}.$$

The undersuffices of δ and $\lambda(1, 2$ and $3)$ correspond to the $T = 1/2, J = 1/2$, $T = 1/2, J = 3/2$ (or $T = 3/2, J = 1/2$), and $T = J = 3/2$ states.

The interaction Hamiltonian used is the ordinary one

$$H = \sum_q (a_q V_q + a_q^\dagger V_q^\dagger), \quad (11)$$

$$V_q = i f_0 \sqrt{\frac{2\pi}{\omega_q}} \tau_q (\sigma \cdot q) u(q^2),$$

where $u(q^2)$ is the source function of the nucleon, f_0 the unrenormalized coupling constant and τ_q the pion τ spin with the momentum q . The notations are those of ref [77].

Eq. (10) shows that the pion-nucleon potential is attractive for the $T = J = 3/2$ state and the depth of it rapidly increases with the pion energy if $u(q^2)$ stays

nearly 1 up to a large value of q^2 . Therefore, the resonance should occur when the depth becomes large enough. The magnitude of the renormalized coupling constant f^2 is determined from the pion-nucleon scattering experiments, the photon-pion production, and the nucleon-nucleon scattering. On the other hand the source function $u(q^2)$ is characteristic of the static theory and we can discuss it only within the framework of the static theory. The occurrence and location of the first resonance depend very much on $u(q^2)$.

The one level resonance formula is obtained by employing the effective range approximation, which is equivalent to assume that the shape of the wave function of the resonance state is independent of the excitation energy. The formula obtained by CHEW and Low is

$$\operatorname{tg} \delta_3(\omega) = \frac{\lambda_3}{\omega} \frac{q^3 u^2(q^2)}{1 - \omega/\omega_1}, \quad (12)$$

where the resonance energy ω_1 is approximately given by

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{1}{4f^2 I}, \\ I &= \frac{1}{\pi} \int_{\mu}^{\infty} \frac{q^3 u^2(q^2)}{\mu^2 \omega^3} d\omega. \end{aligned} \quad (13)$$

The width Γ at the resonance energy becomes

$$\Gamma = \frac{8f^2}{3} \frac{q_1^3}{\mu^2} \approx 80 \text{ Mev},$$

where $u(q_1^2) = 1$ were assumed. The resonance energy depends very much on $u(q^2)$ and approximations used. By a straight cutoff of $u(u(q^2)) = 1$ for $q \leq q_c$ and 0 for $q > q_c$ and taking $q_c \approx 6\mu$, we obtain

$$\omega_1 \approx \frac{\pi}{4f^2} \cdot \frac{\mu^2}{\omega_c} \approx 230 \text{ Mev}.$$

The condition for occurrence of the resonance is not a trivial matter and can be discussed only if we deviate from the effective range approximation. We shall discuss the condition in a simple case of the no-crossing approximation. The phase shift [77], [69] in this approximation is

$$\operatorname{tg} \delta(\omega) = \frac{\lambda_3 \frac{q^3}{\omega} u^2(q^2)}{1 - \frac{\lambda_3 \omega}{\pi} A(\omega)} \quad (14)$$

and

$$A(\omega) = P \int_{\mu}^{\infty} \frac{q'^3 u^2(q'^2)}{\omega'^2 (\omega' - \omega)} d\omega',$$

where P means to take the principal value of the integral.

The resonance ($\delta = \pi/2$) occurs when the denominator vanishes for a certain value of ω . If $A(\omega)$ is approximately independent of ω (the effective range approximation) and positive, $(\lambda_3\omega/\pi)A(\omega)$ increases indefinitely and a resonance occurs. This is the case for $u(q^2)$ decreasing very slowly for large q . On the other hand when $u(q^2)$ decreases rapidly beyond a certain small value of q , $(\lambda_3\omega/\pi)A(\omega)$ may not reach 1 for any ω and no resonance can be expected.

In the no-crossing approximation $q'^2 u^2(q'^2)/\omega'^2(\omega - \omega')^2$ is proportional to the probability and therefore the time $t(\omega')$ for finding a pion with a momentum q' and energy ω' during the scattering. Then the integrand of $A(\omega)$ is proportional to the phase change $t(\omega') \times (\omega' - \omega)$, which the system receives during the time it spends in the state of pion with q' and ω' . This is positive for $\omega' > \omega$ and negative for $\omega' < \omega$. The condition $l = (\lambda_3\omega_1/\pi)A(\omega_1)$ is that the sum of such phase changes should be large and positive, requiring that the system spends enough long time in those states for which $\omega' > \omega$.

The condition for occurrence of the resonance is similar when a more refined approximation than the no-crossing approximation is employed. Essential point is that the pion-nucleon interaction remains strong up to high relative momentum between the pion and nucleon and gives us a large $t(\omega') \times (\omega' - \omega)$. Relativistic treatment of the pion-nucleon scattering in TAMM-DANCOFF approximation by BETHE et al. [78] and DALITZ et al. [79], where no cut off function $u(q^2)$ appears, shows that this is in fact true and the wave function of the resonant state has a long tail for large pion momentum q' . Also other strong interactions such as the hyperon-kaon-nucleon coupling would play the similar role with the pion-nucleon interaction of high relative momentum and may not be neglected as a cause of resonance.

Since in the static theory all these effects are substituted by the cut off function $u(q^2)$, and it has been so far determined phenomenologically by comparison with the experiments. Whether the resonance does really follow from the present field theory can be answered only when we go beyond the static approximation.

B) The second and third excited states of the nucleon

After the pioneer work by COOL et al. [7] on the high energy pion-nucleon scatterings, several models were proposed to explain the large peak observed in the total $\pi^- - p$ cross-section. Since the N_2 and N_3 resonances were not separated, the cross-section at the peak was very large. This together with the ratio requires a large $J(\geq 5/2)$ of the resonant state if the peak was due to a single resonance level.¹⁾ Under such circumstances the models proposed then should be revised now.

The first model we discuss is the strong pion-pion interaction model. The resonant scattering of the incoming pion and the bound pion in the nucleon is considered as a cause of the large $\pi^- - p$ peak. DYSON [80] considered the $T = l = 0$ resonant pion-pion scattering and TAKEDA [81] the $T = l = 1$ resonant scattering. Importance of the strong pion-pion scattering was originally suggested by PICCIONI and has been constantly emphasized by him. Merits of this model is a large pion wave length in the centre of the mass of the two pions. Then a maximum allowable cross-section in a pure (T, l) state of the two pions becomes large enough to explain the observed $\pi^- - p$ peak even for small l .²⁾

¹⁾ The ratio $\sigma_{el}/\sigma_{tot} = 0.78$ was used for obtaining $J \geq 5/2$. See page 1095, ref [7].

²⁾ The maximum pion-pion scattering cross-section in a pure (T, l) state is equal to $8\pi\lambda^2 \times (2l+1)$, where λ is the pion wave length in the centre of mass of two pions. There was a mistake of factor 2 in refs. [80] and [81].

BRUECKNER [82] pointed out that the energy of $\pi^- - p$ peak is nearly equal to $2W_1$, although this coincidence became more or less obscure after the peak was separated into the two resonances. Furthermore the location of the $\pi^+ - p$ peak beyond the $\pi^- - p$ peak is about $3W_1$. He considered the main processes at the respective peaks as $N + \pi$, $N + 2\pi$, and $N + 3\pi$, respectively. Each of pions in these final states resonates with the nucleon at the relative energy W_1 , thus explaining the coincidence.

FELD [46] [83] considered the $\pi^- - p$ peak as due to the inelastic peak ($\pi^- + p \rightarrow 2\pi + N$), where one of the pions is resonating with the excited nucleon N_1 . The latter decays subsequently into a pion and a nucleon. More than one state with different J would show a maximum. This idea is related with BRUECKNER's. If the angular momentum and parity of N_2 and N_3 are those given in Table I, then Feld's original idea should be modified as to give a $\pi + N_1$ resonance in $l = 0$, $J = 3/2$ state at $W = W_2$ and a $\pi + N_1$ resonance in $l = 1$, $J = 5/2$ state at $W = W_3$.

After the clear separation between N_2 and N_3 was made, more elaborate proposals along similar lines have been made by various authors. Before to discuss these in some detail, we shall divide possible cause of the resonances into two different classes. The one is due to the sharp maximum of the pion production cross-section $\pi + N \rightarrow 2\pi + N$ at $W = W_2$ or W_3 in the respective (T, J, P)

state. The maximum of the inelastic scattering does not necessarily require a $\pi/2$ phase shift at the maximum and ordinarily be accompanied with a small phase shift. Only when the inelastic peak is sharp enough, the dispersion relation requires $\delta = \pi/2$. The second is to ascribe the peak as the phase shift passing through $\pi/2$. In this case $\sigma_{\text{el}} \geq \sigma_{\text{inel}}$ at the resonance energy and the equal sign is valid only when we have complete absorption. The two cases, of course, cannot be clearly distinct. A sharp peak of σ_{inel} could be a cause of $\delta = \pi/2$. Conversely a phase shift passing through $\pi/2$ could produce a peak for σ_{inel} . Nevertheless the distinction becomes clearer for a broader peak.

Various authors [52], [58], [61], [63] agree on important rolls of both the p-wave pion-nucleon interaction and the pion-pion interaction upon the second and third resonances. The range of the two interactions are about $1/2m$ and $1/2\mu$, respectively. In Fig. 8 the maximum pion angular momentum being able to participate in the pion-nucleon scattering is illustrated for the two different ranges of the pion-nucleon interaction. Since high partial waves ($l = 2$ and 3) participate in the N_2 and N_3 resonances, Fig. 8 indicates that the pion-pion interaction must play a roll. On the other hand if the pion-pion interaction is much stronger than the pion-nucleon interaction and the impulse approximation can be used to collisions

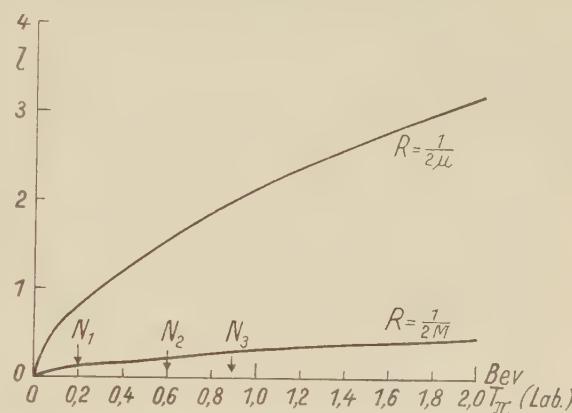


Fig. 8. The maximum value l of the pion angular momentum participating in pion-nucleon scattering. The classical formula $R = lk$ is used, where the range R of the pion-nucleon interaction is taken as equal to $(2\mu)^{-1}$ or $(2M)^{-1}$.

between the incoming pion and the pion cloud of the nucleon, the width of N_2 or N_3 would be much larger than that observed due to the momentum spread of the pions in the cloud [7], [75], [76]. The width due to this Doppler effect would be of an order of $2pq/\mu$ (≈ 2 Bev), where q is the magnitude of the momentum spread and p is the incoming pion momentum at the resonance energy. This indicates that the pion-nucleon interaction cannot be neglected against the pion-pion interactions and the impulse approximation is not valid.

Relative importance of the two interactions depends on details of each model. PEIERLS [52], Ross et al [65], and BETHE et al [58] considered the resonances as principally due to the peak of the one pion production cross-section. The strong final state interaction of the $N + 2\pi$ state through the ordinary pion-nucleon interaction enhances the inelastic scattering and this enhancement becomes maximum at the respective resonance energy. For the third resonance both pions are in p-state¹⁾ and the enhance factor would become maximum if they were both resonating with the nucleon in the N_1 state. Therefore we expect that $W_3 \approx 2W_1$. For the second resonance one of the pions is in s-state and the other in p-state. In this case although only the p-wave pion resonates with the nucleon, the enhancement factor can have maximum around $W = W_3$.²⁾

In these models pion-pion interaction plays a role of transforming the high energy incoming pion ($l = 2$ or 3) into two low energy pions with low l (0 or 1). The cross-section would be also enhanced by possible resonances of the pion-pion scattering, but this is not a principal cause of the N_2 and N_3 resonances.

As for the isotopic spin dependence of the resonances, BETHE et al assumed that the $T = 0$ pion-pion interaction is a main cause of the N_2 excitation and the $T = 1$ pion-pion interaction for the N_3 excitation. The former assumption gives us the required assignment $T = 1/2$ for N_2 . For the latter the total system can have both $T = 1/2$ and $T = 3/2$. The final state $2\pi - N$ interaction would enhance the $T = 1/2$ transition over the $T = 3/2$ transition. Ross et al [63] and independently one of the authors [84] calculated the amplitude A for the two p-wave pions being both in $J = T = 3/2$ state with the nucleon. This amplitude depends on the values of J and T of the total $2\pi - N$ system. The results are shown in Table III.

Table III. The amplitude $A_{J,T}$ of the two p-wave pions both resonating with the nucleon in the N_1 state for a given J and T of the two pions and nucleon system.

J	T	$A_{J,T}$
1/2	1/2	1/9
1/2	3/2	-2/9
3/2	1/2	-2/9
5/2	1/2	1/3
3/2	3/2	4/9
5/2	3/2	-2/3

If the N_3 resonance is in fact due to the maximum of σ_{inel} and particularly due to the inelastic processes of the both p-wave pions forming N_1 with the nucleon, we

¹⁾ The nucleon is treated as very heavy. This is not a very poor approximation at the energy W around the resonances.

²⁾ PEIERLS [52] estimated $W_2 \approx 570$ Mev ($T_\pi = 600$ Mev) and $W_3 \approx 690$ Mev ($T_\pi = 800$ Mev). Ross et al [63] estimated $W_3 \approx 800$ Mev ($T_\pi \approx 1$ Bev).

should expect a peak¹⁾ for a state with a large $A_{J,T}$ and furthermore the magnitude of the inelastic peak would be very small: A part of the peak would come from the peak of σ_{el} , which is accompanied with the σ_{inel} peak. Even if we add this part, it is far less than the experimental value ($\approx 36 \text{ mb}$). Therefore the enhancement factor must become maximum at $W \approx W_3$ also for those states where only one of the p-wave pions is forming N_1 with the nucleon. As for N_2 , one of the pions is in s-state and the enhancement is presumably due to the p-wave pion resonance with the nucleon. Most difficult part of these attempts is to explain the small width of the N_2 or N_3 resonance. This is open to questions.

Present authors et al [61], [62] proposed a model of the N_2 and N_3 resonances based on a different point of view. Here the strong p-wave pion-pion interaction plays an important role more than initiating the high energy pion-nucleon interaction. The model is essentially an extension of Dyson-Takeda model [80], [81], although the impulse approximation is avoided and the p-wave pion-nucleon interaction is treated as important as the pion-pion interaction.

The experimental results show that nucleon is not completely opaque for the incoming pion. For the second resonance $\sigma_{\text{tot}}^{\text{res}}/8\pi\lambda_2^2 \approx 32 \text{ mb}/47.6 \text{ mb} \approx 0.7$ which leads to $\sigma_{\text{inel}}^{\text{res}}/\sigma_{\text{tot}}^{\text{res}} \approx 0.3$ (See Table II). Although the experimental values of $\sigma_{\text{tot}}^{\text{res}}$ and $\sigma_{\text{inel}}^{\text{res}}$ would be subject to large errors, this ratio (≈ 0.3) indicates that the elastic scattering is principally of nondiffractive type. For the third resonance, $\sigma_{\text{tot}}^{\text{res}}/12\pi\lambda_3^2 \approx 36 \text{ mb}/45.3 \text{ mb} \approx 0.8$ and we obtain also a small ratio $\sigma_{\text{inel}}^{\text{res}}/\sigma_{\text{tot}}^{\text{res}} \approx 0.2$. The $\delta = \pi/2$ is required for having the maximum since the elastic scattering is rather large compared with the inelastic one. Because of the transparency of the nucleon transitions between the elastic ($\pi - N$) and inelastic ($2\pi - N$) states are occurring during the collision and frequent reoccurrence of the elastic state would cause $\delta = \pi/2$.

The resonant pion-pion scattering in $T = l = 1$ state is assumed and the resonant state is phenomenologically treated as a vector and iso-vector particle $\rho^{\pm,0}$. Then the pion-pion interaction is replaced by a $\rho\pi\pi$ interaction. The coupling constant is determined by the assumed width of the pion-pion resonance and the mass of ρ is taken as equal to the resonance energy. The $\rho\pi\pi$ and $NN\pi$ interactions participate in the scattering and transitions among πN , $2\pi N$, and ρN states frequently occur during the collision.²⁾ The scattering amplitude for $\pi + N \rightarrow \pi + N$ calculated in Born approximation is 4 times larger in $T = 1/2$ state than in $T = 3/2$ state. Furthermore, partial wave expansion shows that the $T = 1/2$, $d_{3/2}$ and $T = 1/2$, $f_{5/2}$ scattering phase shifts are most predominant and attractive among partial wave phase shifts for $l \geq 2$.

The scattering amplitude is very energy dependent and the real part of it is expected to be largest around $W \lesssim m_\rho$ for the $d_{3/2}$ state and $W \gtrsim m_\rho$ for the $f_{5/2}$ state. The $T = 1/2$, $d_{3/2}$ amplitude calculated in perturbation approximation [62] supports this:

W/μ	3	4	5	6
$f(W)/\mu^{-1}$	0.06	0.25	0.10 + 0.55 <i>i</i>	-0.18 + 0.50 <i>i</i>

¹⁾ Ross et. al [63] predicted a peak for the $T = 3/2$, $J = 3/2$, and $T = 1/2$, $J = 5/2$ states. The former would correspond to the large peak of the $\pi^+ - p$ scattering cross section around $T_\pi \approx 1.3 \text{ Bev}$. It is not clear for us why a peak is not expected for the $T = 3/2$ and $J = 5/2$ state, where $|A_{J,T}|$ is large.

²⁾ Tamm-Dancoff approximation was used in actual calculation, where states other than the πN , $2\pi N$, and ρN states are neglected [62].

The Feynman graph corresponding to the perturbation approximation is shown in Fig. 9a and the imaginary part of $f(W)$ is due to the free ρ production.

Calculation beyond the Born approximation is expected to bring a much sharper maximum than the result of perturbation calculation indicates. Such will be performed by Tamm-Dancoff method. For examples, by limiting the states to πN , ρN , and $2\pi N$ states the scattering proceeds as follows (Fig. 9b):

$$\pi N \rightarrow 2\pi N \xrightarrow{\rho N} 2\pi N \xrightarrow{\pi N} 2\pi N \dots$$

Frequent reoccurrence of the πN state (incident channel) is necessary for obtaining $\delta = \pi/2^1)$ The Doppler effect would be reduced for the p-wave pions being bound strongly to the nucleon during the collision and its effective mass being m rather

than the free pion mass μ . The width due to the Doppler effect would become of an order of $2pq/m$ instead of $2pq/\mu$.

All the models of the higher resonances proposed so far are of preliminary nature. The essential difficulty arises from presence of the large inelastic cross-section. In the case of the first resonance only the elastic scattering occurs. Then if the $\pi - N$ potential is attractive and becomes stronger with energy, it is rather natural to have a resonance at a certain energy. On the other hand if the

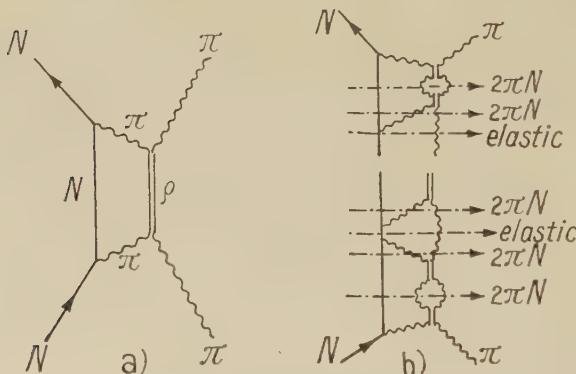


Fig. 9. a) The lowest order Feynman graph of the pion-nucleon scattering in the model of ref. [61].

b) An example of Feynman graph in the Tamm-Dancoff approximation.

inelastic channels compete with the elastic and their magnitudes increase with energy, the pion in the elastic channel would not have time to enjoy a large attractive force from the nucleon. Thus an occurrence of $\pi/2$ phase shift would critically depend on the absorption.

Another difficulty is the observed small widths of N_2 and N_3 . The expected widths would be at least of an order of ΓPME^{-1} . If the resonances are primarily due to the final state interactions of the $2\pi N$ states²⁾, Γ is the width (≈ 140 Mev) of the first resonance (N_1), P the probability ($\approx 100\%$) for finding a N_1 during the collision, M the mass of N_1 , and E the average energy of the N_1 found during the collision. On the other hand, if the second model [61] is taken, Γ is the assumed

¹⁾ In this model the effects of the final state interaction due to the N_1 formation in the inelastic channel is not necessarily excluded. They will appear if we take more configurations besides πN , $2\pi N$, and ρN into account and be presumably important for making the resonance sharper.

²⁾ Since one of the two pions does not resonate with the nucleon for the second resonance and similar situation is expected for the third resonance because of the small $A_{5/2, 1/2} (=^{1/3})$, the resonances are expected to become broader.

width (≈ 170 Mev) of the pion-pion resonance, P the probability for finding a ρ particle in the resonating state, M the mass of ρ (≈ 600 Mev), and E the average energy of the ρ particle found during the collision.¹⁾ Since the above values are the lower limits and are already near to the observed widths, it would not be an easy matter to obtain the observed small widths.

An occurrence of any of the excited states including N_1 depends much on the strength of the interactions concerned. We have seen that the pion-nucleon interaction must remain strong up to a high relative momentum q between the pion and nucleon in order to have the N_1 resonance. Other interactions beside the pion-nucleon and pion-pion interactions, such as the hyperon-kaon-nucleon interactions²⁾, might also play an important role. BAZ [86] assumed that the strong attractive hyperon-kaon interaction is the principal cause of the N_2 and N_3 resonances. If one gets a large value for the ratio of the reduced widths, γ_K^2/γ_π^2 of N_3 (§ 1), it would favour his assumption. But one would ordinarily expect to have resonances for small relative $\Lambda - K$ angular momenta and we feel that the large $J (= 5/2)$ of N_3 is difficult to explain.

Although all the unknown effects are hidden in the cut-off function $u(q^2)$ in the static theory, the high momentum behaviour of $u(q^2)$ should be decided by considering the hyperon-kaon-nucleon interaction as well as the high momentum behaviour of the ordinary pion-nucleon interaction. Thus any calculation so far made on any of the excited states is only making a plausible argument for the presence of the excited state and not really able to predict it. And even if they do, the magnitude of width and the position of the resonance would subject to large errors.

§ 3. Optical Property of the Nucleon

As we have seen in § 1, very strong scatterings and absorptions of pions by nucleons occur at the resonance energies W_1 , W_2 , and W_3 . The main aspects of the pion-nucleon collisions in the energy region $T_\pi < 1$ Bev are determined by these strong absorptions together with the absorption of a line spectrum at a negative pion kinetic energy $T_\pi = (\mu^2/2M) - \mu$. The latter corresponds to the unphysical $\pi + N \rightarrow N$ absorption. In particular, the pion-nucleon scatterings below $T \approx 400$ Mev are well described by the N_1 and the $\pi + N \rightarrow N$ absorption [73] - [77] and even the difference of the two S-wave scattering lengths $a_3 - a_1$ was derived by the two absorptions [72].³⁾ Also there is a possibility to understand $(2a_3 + a_1)/3$ in terms of the same absorptions [73].

As for the higher energy region, say $T \gtrsim 2$ Bev, the measured total cross-sections of the pion-nucleon scatterings (Fig. 1 and Fig. 2) seem to be nearly constant⁴⁾ ($\approx 30 \text{ mb} \pm 5 \text{ mb}$) and there are no indications of presence of any strong line or band absorption spectrum. In this energy region the pion wave length λ is much

¹⁾ The values of Γ and M of the ρ are those of ref. [61].

²⁾ The mass spectrum of the hyperons as well as the resonance energies of the nucleon are discussed in terms of SAKATA model [85]. Although the most of the predicted resonance energies agree well with the observed ones, it would be a premature to compare their results with the experiments.

³⁾ The scattering length a_i ($i = 1$ or 3) is that for the $T = i/2$ ($i = 1$ or 3) pion-nucleon scattering.

⁴⁾ Measurements of the mean free path of the secondary particles in jet showers produced by cosmic rays give us some information on the total pion-nucleon inelastic cross section at very high energy. Results are consistent with $\approx 30 \pm 5$ mb.

shorter than the spatial extent a of the nucleon and the binding energy between the pion cloud of the nucleon and the nucleon core is smaller than the incoming pion energy. Therefore, the collision is regarded as one between each constituent (pion cloud, nucleon core, etc.) of the nucleon and the incoming pion and its principal feature would be determined by the local property of the nucleon. There would not be an excitation of the nucleon as a whole. Thus the collision can be understood by the so-called optical model.

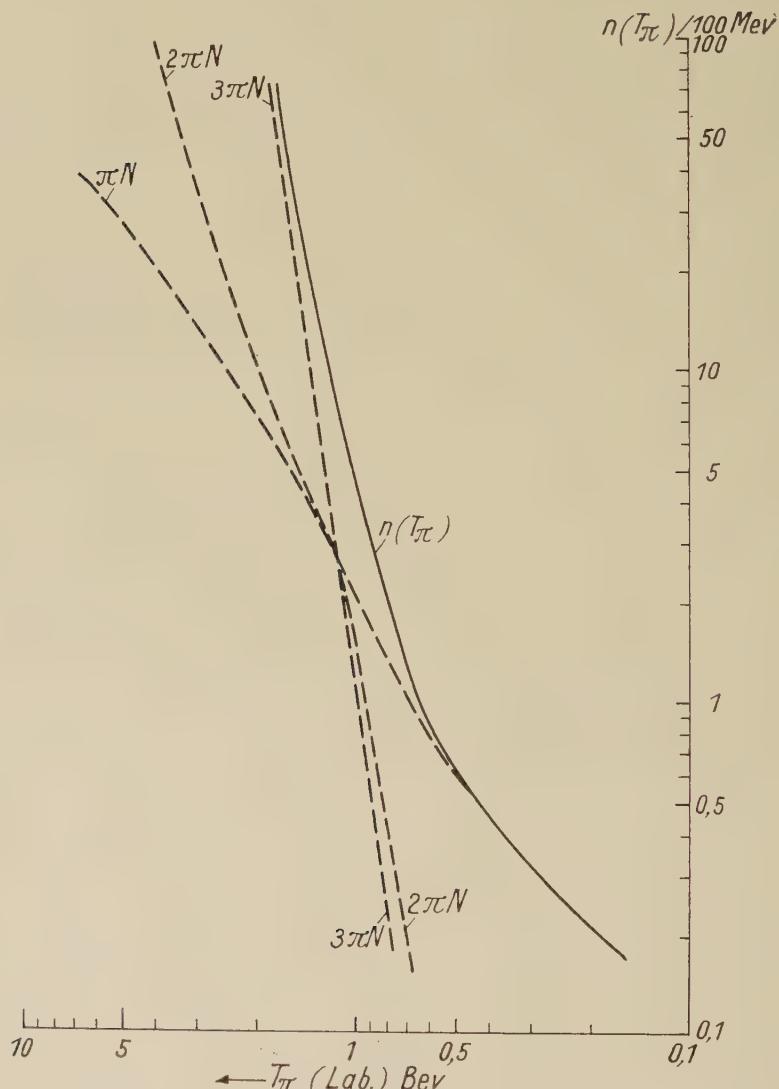


Fig. 10. The number $N(T_{\pi})$ of the levels of the excited nucleon per 100 Mev excitation energy as a function of the incoming pion kinetic energy T_{π} . Only those levels which are due to the πN , $2\pi N$ and $3\pi N$ configurations are counted. Also the numbers of levels with the three different configurations are separately plotted.

Let us discuss this point in a different way. In order that the collision be local, there must be many different modes of internal oscillation of the nucleon and therefore large level densities for a given excitation energy W . Now assuming that the pion-nucleon system is confined in a small volume with a radius R , we calculate the level density of the system at an excitation energy W . Many people has made such calculations for evaluating the branching ratios of the elastic, one pion production, and many pion production cross-sections. Here we are mostly concerned with the absolute value of the level density.

As an example we calculate the level density of the $N + \pi$, $N + 2\pi$, and $N + 3\pi$ states according to MILBURN [87].¹⁾ The pion mass is neglected and R is taken equal to $1/4\mu$. The number of the levels per 100 Mev energy interval is plotted in Fig. 10 as a function of T_π . The result shows that the total number of levels below $T_\pi = 1$ Bev is only a few, indicating the resonances could govern the pion-nucleon collisions in this region. On the other hand the number of levels rapidly increases with T_π above 1 Bev and many levels would certainly participate in the collision above $T \approx 2$ Bev. The radius $R = 1/4\mu$ is chosen in such a way as the rapid transition between the small level density and the large level density to occur at the energy region $W = 1 \sim 2$ Bev. The level density is, of course, very much sensitive on choice of R and ordinarily one takes a larger R ($\approx 1/\mu$).²⁾ The actual number of levels participating in the pion-nucleon collision at T_π is about $\varrho(T_\pi) \Gamma(T_\pi)$ ³⁾, where $\Gamma(T_\pi)$ is the magnitude of width averaged over many levels around T_π . Γ is supposed to be larger than the width of the first resonance N_1 resulting in $\varrho \Gamma \gg 1$ for $T_\pi \gtrsim 2$ Bev.

A) Optical constants of the nucleon

As discussed above the optical model may be applied on the pion-nucleon scatterings in the energy region $T_\pi \gtrsim 2$ Bev. Since the resonances have so far appeared at the pion energy $T_\pi < 1$ Bev, the energy region where the model is valid may be extended down to about $T \approx 1$ Bev. The pion-nucleon collisions are determined by the refraction and absorption indices of the nucleon for the incoming pion. These are functions of the pion energy but the observed smooth change of the pion-nucleon scattering cross-sections indicates that they change slowly with the energy.

As experiments showed and as is expected from the large level density of the inelastic (pion production) channels, the absorption is principally due to the inelastic scatterings. This means that the elastic scattering is mostly due to the diffraction scattering. The differential elastic scattering cross-section for $\pi^- p$ at 6.8 Bev [9] showed a typical diffraction pattern. Also in the lower energy regions $T = 4.5 \sim 5$ Bev [22], [23] and $T \lesssim 1.85$ Bev [21], [20], [19], [13] similar diffraction patterns have been observed in the forward direction. In these cases a small tail

¹⁾ The equations (3.37), (3.39) of ref. [87] were used. Also the statistical weight of Table IV of ref. [87] was taken into account.

²⁾ The finite pion mass and the conservation of the angular momentum and the isotopic spin, which are neglected, would decrease $\varrho(W)$ for a given R . Furthermore LEPORE et al. [88] made a suggestion that a damping factor such as $\exp(-W_i^2 \kappa_i^2)$ may be multiplied on the phase space volume when the i -th particle has an energy W_i and is located at κ_i . If this is the case, $\varrho(W)$ would decrease further. All these effects might make us possible to choose a larger R than $R = 1/4\mu$ without changing the energy region of the rapid transition.

³⁾ Only those levels with an appreciable Γ_{el} should be counted in evaluating.

or peak is observed in the backward direction, indicating the existence of some elastic scatterings of non-diffraction type.

When we neglect the spin dependence of the pion-nucleon scattering, the elastic, inelastic, and total cross-sections are expressed as follows.:

$$\begin{aligned}\sigma_{\text{el}} &= \pi \lambda^2 \sum_l (2l+1) |1 - \eta_l \exp 2i\delta_l|^2, \\ \sigma_{\text{inel}} &= \pi \lambda^2 \sum_l (2l+1) (1 - \eta_l^2), \\ \sigma_{\text{tot}} &= 2\pi \lambda^2 \sum_l (2l+1) (1 - \eta_l \cos 2\delta_l).\end{aligned}\quad (15)$$

Here δ_l is the phase shift of the l -th partial wave and η_l is the magnitude of the elastic amplitude ($0 \leq \eta_l \leq 1$).

Since the elastic scattering is mostly the diffraction scattering in the energy region we are interested, we assume $\delta_l = 0$. Then the scattering amplitude $i(\lambda/2) \sum_l (2l+1) (1 - \eta_l \exp 2i\delta_l) P_l(\cos \theta)$ is nearly pure imaginary. STERNHEIMER [89] calculated the real part of the forward scattering amplitude for $T < 2$ Bev by using the dispersion relation and the measured $\pi^- - p$ total cross-sections. The results show that the real part of the $\pi^- - p$ forward scattering amplitude is smaller than the imaginary part at least by a factor 4 for $T_\pi > 1.4$ Bev.

ITO and MINAMI and others [90]—[94] have analyzed the pion-nucleon elastic scatterings and especially the differential cross-section assuming $\delta_l = 0$. Before going into the discussion of the differential cross-section we shall make a simple calculation of the optical constants of the nucleon. Assuming that $\delta_l = 0$ and η_l is independent of l , we obtain

$$\begin{aligned}\sigma_{\text{el}}/\sigma_{\text{tot}} &= \frac{1 - \eta}{2}, \\ \sigma_{\text{tot}} &= 2\pi \lambda^2 \sum_{l=0}^{l_{\text{max}}} (2l+1) (1 - \eta) = 2(1 - \eta) \pi R^2.\end{aligned}\quad (16)$$

Here R is the nucleon radius ($R = \lambda l_{\text{max}}$).

The two quantities $\sigma_{\text{el}}/\sigma_{\text{tot}}$ and σ_{tot} have been measured for the $\pi^- - p$ scattering (Fig. 2). Since the experimental errors are rather large and better experiments will be done in near future, we shall tentatively employ the experimental values used in ref. [91]. Then η and πR^2 can be calculated and the results are shown in the last two columns of Table IV for $T_\pi = 1, 1.5$ and 4.5 Bev.

Table IV. Values of η and πR^2 for the $\pi^- - p$ scattering.

T_π (Bev)	σ_{tot} (mb)	$\sigma_{\text{el}}/\sigma_{\text{tot}}$	η	πR^2 (mb)
1.0	46	1/2	0	23
1.5	30	1/3	1/3	22.5
4.5	20	1/5	3/5	25

The constancy of the geometrical cross-section πR^2 with energy is very remarkable¹⁾ but this point should not be overemphasized because of the uncertainty of the experimental cross sections σ_{tot} and σ_{el} . The η seems to change with energy and

¹⁾ Constant geometrical cross-section was also obtained from analysis of the $\pi^- - p$ elastic differential cross-sections at different energies (ref. [91]).

furthermore it does not seem to tend to zero. Therefore the nucleon would not be a completely black body for very high energy pions.

If we want to make a more reasonable argument on R and η , we have to take the l -dependence of η_l into account [89] — [94]. Since the path length of incoming pion in the nucleon is larger for larger l , η_l usually depends on l . The absorption coefficient $K(r)$ of the optical model at a point distant by r from the centre of the nucleon is related to η_l as follows [95]:

$$\eta_l = \frac{1}{4} \int_{-\sqrt{R^2 - \varrho^2}}^{\sqrt{R^2 - \varrho^2}} K(\sqrt{\varrho^2 + \xi^2}) d\xi \left(k\varrho = l + \frac{1}{2} \right). \quad (17)$$

From the measured angular distribution of the π^- — p scattering, η_l is calculated under the assumption $\delta_l = 0$:

$$1 - \eta_l = \frac{1}{\lambda} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{d\sigma_{el}}{d\Omega}} P_l(\cos \Theta) d(\cos \Theta). \quad (18)^1)$$

Then the absorption coefficient $K(r)$ can be obtained by using Eq. (17) as a function of r . The radial dependence of $K(r)$ ²⁾ obtained [94] for 1.3 Bev π^- — p scatterings is shown in Fig. 11.

The values of R and η_l obtained by various authors agree among each other within the experimental errors. And more accurate measurements on σ_{tot} , σ_{el}/σ_{tot} , and $d\sigma/d\Omega$ at various different energies are required before we have reliable knowledge of the optical parameter of the nucleon. Furthermore, the two assumptions, i) $\delta_l = 0$ and ii) spin independence of δ and η , should be re-examined. KOBA et al [96] studied the requirements which the assumptions put on the experimental data. They are, e. g.,

$$\sigma_{tot} \geq 4\pi\lambda \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_0 \text{ (for any } \Theta),$$

and

$$\sigma_{inel} \geq \sigma_{el}.$$

Existing experiments in the optical region satisfy these conditions.

i) The transparaney ($\eta \neq 0$) of the nucleon against high energy pions is obtained under the two assumptions. This means that some parts of the

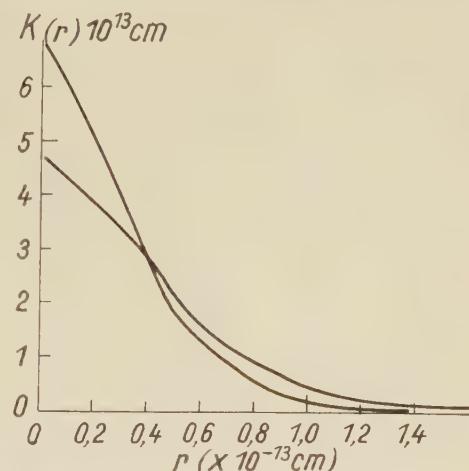


Fig. 11. The absorption coefficient $K(r)$ as function of the distance from the nucleon centre obtained in ref. [94]. The two curves corresponds to the two extreme experimental values of the angular distribution of the diffraction scattering.

¹⁾ The scattering amplitude must have a definite sign for Eq. (18) being valid. See ref. [96].

²⁾ The large value of $K(r)$ at a small r is very interesting but depends much on the large angle scattering cross-sections, which are subject to large errors.

incoming pion would penetrate the nucleon unabsorbed and we have an elastic scattering of non-diffraction type. The phase shift δ which such penetrating pion would receive is of an order of $\delta \sim \Delta k \cdot R \sim VR$ and independent of k .

The Δk is the change of the pion wave number when the pion enters into the nucleon and V is the depth of pion-nucleon potential for the elastic scattering. If we take $V \sim \mu$ and $R \sim 1/\mu$, δ becomes of an order of 1. The assumption requires that V is small compared with μ .

ii) As for the second assumption, the spin independence of δ and η , there has been neither experimental nor theoretical evidence for or against the assumption. Therefore we present here the assumption due to OKUN and POMERANCHUK [93], which leads to the spin independence. They assumed that the elastic pion-nucleon scattering is mostly diffraction, which leads to a small spin flip scattering compared to the elastic scattering:

$$|f_+ - f_-|^2 \ll |f_\pm|^2.$$

Here f_\pm is the l -th partial wave scattering amplitude with $J = l \pm 1/2$. This automatically assures the spin independence ($f_+ \approx f_-$) of the scattering. Existing data of the π^- -p scatterings show that the scatterings are more of diffraction type at higher energies, supporting the assumption. Similarly the charge independence of f is obtained.

B) Optical property of the nucleon and the pion-pion interaction

BLOKHINZEV [97] first pointed out the occurrence of two different types of collisions at a very high energy region, the peripheral and central collisions. Since the nucleon is composed of the core and the pion cloud and they behave more or less independently for high energy incoming particles, the features of collision are expected to be different depending on which part of the nucleon is collided. The pion cloud plays the most important role in the peripheral collision and the core in the central collision.

In the low energy region $T_\pi < 1$ Bev several resonances are observed corresponding to an excitation of characteristic oscillations between the cloud and the core. For higher energies where $T_\pi \gg U$, U being the binding energy of the pion cloud to the core, these characteristic oscillations would not be excited and the core and cloud oscillate independently. If a certain characteristic energy is observed experimentally, it would rather correspond to a characteristic oscillation of either the core itself or the pion of the cloud itself. In such high energy regions the $\pi - N$ and $N - N$ inelastic scattering cross-sections will be expressed by the $\pi - \pi$ total cross-section $\sigma_{\pi\pi}$, the π -core total cross-section $\sigma_{\pi, \text{core}}$, and the core-core collision cross-section $\sigma_{\text{core, core}}$ [98]:

$$\begin{aligned} \sigma_{\pi N} &\approx n_\pi \sigma_{\pi\pi} + \sigma_{\pi, \text{core}}, \\ \sigma_{NN} &\approx n_\pi^2 \sigma_{\pi\pi} + 2n_\pi \sigma_{\pi, \text{core}} + \sigma_{\text{core, core}}. \end{aligned} \quad (19)$$

The peripheral collision corresponds to the $\sigma_{\pi\pi}$ part and the central one to the $\sigma_{\pi, \text{core}}$ and $\sigma_{\text{core, core}}$. The n_π is the average pion number in the cloud. The $\sigma_{\pi, \text{core}}$ and $\sigma_{\text{core, core}}$ would be of an order of the geometrical cross-section of the core for high energy collisions and be presumably small. If this is the case from Eq. (19), we obtain $\sigma_{\pi\pi} : \sigma_{\pi N} : \sigma_{NN} \approx 1 : n_\pi : n_\pi^2$. The experimental data are consistent with $n_\pi \approx 1$. The $K(r)$ in Fig. 11 is probably due to $\sigma_{\pi, \text{core}}$ for small r and $\sigma_{\pi\pi}$ for larger r .

The large difference of $K(r)$ for small and large r would be an indication of the presence of the two types of collisions, although the calculated $K(r)$ would be subject to a large error, in particular, for small r . Further confirmation of the presence of the two regions with different optical property is very desirable. The Eq. (19) has a meaning only when $\sigma_{\pi\pi}$ and $\sigma_{\pi, \text{core}}$ do not depend on its charge or spin state. In this point we shall mention a remarkable nature of the collisions at high energy limit. The crossing symmetry of the pion-nucleon scattering amplitude requires

$$f_{\pi^- p}(E) = f_{\pi^+ p}^*(-E),$$

where $f_{\pi^\pm p}(E)$ is the forward elastic $\pi^\pm - p$ scattering amplitude at a total pion energy E . The causality assures that f is an analytic function of E . Therefore we expand $f_{\pi^\pm p}(E)$ in powers of $1/E$ at very large E , thereby assuming that each cross-section tends to at most a finite constant:

$$f_{\pi^\pm p}(E) = a_\pm^1 E + a_\pm^0 + a_\pm^{-1} \frac{1}{E} + \dots$$

On the real E -axis the crossing relation requires that

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(a_+^{2n} - a_-^{2n}) &= 0 \quad (n = 0, -1, -2, \dots), \\ \operatorname{Im}(a_+^{2n+1} - a_-^{2n+1}) &= 0 \quad (n = 0, -1, -2, \dots). \end{aligned}$$

Since the total $\pi^\pm - p$ cross section is given by $\operatorname{Im} f_{\pi^\pm p}(E)/E$,

$$\lim_{E \rightarrow \infty} (\sigma_{\pi^+ p}(E) - \sigma_{\pi^- p}(E)) = \operatorname{Im}(a_+^1 - a_-^1) = 0.$$

The above proof of $\sigma_{\pi^+ p}(\infty) = \sigma_{\pi^- p}(\infty)$ is due to MIYAZAWA [99]. POMERANCHUK [100] also verified this along the similar line, where explicit use of the dispersion relation was made. For further questions on some subtle features of these verifications we refer to ref. [101]. As for charge independence of $\sigma_{\pi\pi}$ the crossing relation $f_{\pi^-\pi^+}(E) = f_{\pi^+\pi^+}^*(-E)$ leads to a relation among the cross-sections in the three pure isotopic spin states:

$$\frac{5}{6} \sigma_2(\infty) = \frac{1}{2} \sigma_1(\infty) + \frac{1}{3} \sigma_0(\infty).$$

Contrary to the pion-nucleon scattering the crossing relation is not sufficient to obtain $\sigma_0(\infty) = \sigma_1(\infty) = \sigma_2(\infty)$ and one more relation is necessary. Such would be obtained, e. g., if we assume that the charge exchange scattering being negligible compared with the elastic scattering. As for the spin independence of the pion-nucleon scattering we have already discussed before.

Thus Eq. (19) might have meaning for very high energy collisions. Then the optical property of the nucleon, and in particular, its absorption coefficient would be determined by $\sigma_{\pi\pi}$, $\sigma_{\pi, \text{core}}$, and n_π (or more precisely by the pion density $\varrho_\pi(r)$ in the nucleon). The observed large cross-section ($\sigma_{\pi^- N} \approx 30 \pm 5 \text{ mb}$) in the optical region is an indication that the pion-pion interaction would be the main cause of the scattering and the optical property of the nucleon is principally determined by $\sigma_{\pi\pi}$ and n_π ($\varrho_\pi(r)$). If the incoming pion wave length λ becomes shorter and less

than the radius of the pion, then the collision cannot be regarded as due to the pion-pion collision and the optical property of the nucleon would be determined by collisions between more fundamental constituents of the nucleon and pion.

§ 4. Electromagnetic Structure of the Nucleon

A) Introduction

The electromagnetic structure of the nucleon has been revealed by the experiments of the high energy electron-nucleon scatterings at Stanford [102] and Cornell [103]. Introductory review of the theoretical interpretation of the experiments was given, e. g., by LEVY, YENNIE, and RAVENHALL [104]. In this section we shall briefly discuss the present status of the experimental results and its theoretical analysis in terms of the nucleon form factors.

The electron-nucleon scattering matrix element for an electron with a four momentum k and a nucleon with p being scattered into an electron with k' and a nucleon with p' is

$$M = \langle p' | j_\mu | p \rangle \frac{1}{q^2} \langle k' | j_\mu^* | k \rangle, \quad (20)$$

where $q = p - p' = k' - k$ is the energy-momentum transfer in the scattering. The electron current j_μ^* and the nucleon current j_μ can be expressed in terms of the respective Dirac spinors u^e and u as follows:

$$\langle k' | j_\mu | k \rangle = (m_e^2/k_0' k_0)^{\frac{1}{2}} e \bar{u}_e(k') i \gamma_\mu u_e(k), \quad (21)$$

$$\langle p' | j_\mu | p \rangle = (m^2/p_0' p_0)^{\frac{1}{2}} \bar{u}(p') [G_1(q^2) i \gamma_\mu - G_2(q^2) i \sigma_{\mu\nu} (p' - p)_\nu] u(p). \quad (22)$$

The expression for $\langle p' | j_\mu | p \rangle$ is obtained by requiring the relativistic covariance and the time reversal invariance of the expression. Also this satisfies the weak gauge invariance [105], [106], [107]. The meaning of G_1 and G_2 becomes clear if we rewrite $\langle p' | j_\mu | p \rangle$ by using Pauli spinors [104]:

$$\langle p' | j_0 | p \rangle = [G_1(q^2) - \frac{q^2}{8m^2} (G_1(q^2) + 4m G_2(q^2))] \chi'^* \chi, \quad (23)$$

$$\langle p' | \mathbf{j} | p \rangle = \frac{\mathbf{p} + \mathbf{p}'}{2m} G_1(q^2) \chi'^* \chi - \frac{1}{2m} (G_1(q^2) + 2m G_2(q^2)) \chi'^* i(\boldsymbol{\sigma} \times \mathbf{q}) \chi,$$

where the terms up to the order of $(q/m)^2$ are retained.

The charge and anomalous magnetic moment density $\varrho(r)$ and $\mu(r)$ are the Fourier transform of $G_1(q^2)$ and $G_2(q^2)$ respectively:

$$G_1(q^2) = \int \varrho(r) \exp i \mathbf{q} \cdot \mathbf{r} d^3 r,$$

$$G_2(q^2) = \int \mu(r) \exp i \mathbf{q} \cdot \mathbf{r} d^3 r. \quad (24)$$

In particular $G_1(0)$ and $G_2(0)$ are the total charge and the total anomalous magnetic moment of the nucleon:

$$G_{1p}(0) = e, \quad G_{1n}(0) = 0,$$

$$G_{2p}(0) = \mu_p \frac{e}{2m} = 1.79 \frac{e}{2m}, \quad G_{2n}(0) = \mu_n \frac{e}{2m} = -1.91 \frac{e}{2m}. \quad (25)$$

In general $G_1(q^2)$ and $G_2(q^2)$ represent the effective charge and magnetic moment of the nucleon which the scattered electron see during the collision and roughly correspond to the amount of charge and anomalous magnetic moment inside a radius of an order of $1/q$ of the extended nucleon.

The relation between the form factor $G_i(q^2)$ and the charge or magnetic moment density is well defined only for the nonrelativistic cases and there arise ambiguities in interpretation of the relations when we discuss the cases of high momentum transfers [104]. Since $G_i(q^2)$ can be directly calculated from the scattering experiments by Eq. (22), Eq. (24) should be regarded as the definitions of $\varrho(r)$ and $\mu(r)$.

The various moments of the charge or anomalous magnetic moment distribution are defined by

$$G_i(q^2) = G_i(0) \left\{ 1 - \frac{1}{3!} \langle r_i^3 \rangle q^2 + \frac{1}{5!} \langle r_i^5 \rangle q^4 - \dots \right\}, \quad (26)$$

where

$$\langle r_1^n \rangle = \int \varrho(r) r^n d^3x / G_1(0),$$

$$\langle r_2^n \rangle = \int \mu(r) r^n d^3x / G_2(0).$$

In what follows we shall often use the normalized form factor $F_i(q^2)$ instead of $G_i(q^2)$:

$$G_1(q^2) = e F_1(q^2),$$

$$G_2(q^2) = \mu_N \frac{e}{2m} F_2(q^2) (\mu_N = \mu_p \text{ or } \mu_n). \quad (27)$$

These satisfy

$$F_{1p}(0) = F_{2p}(0) = F_{2n}(0) = 1, \quad F_{1n}(0) = 0. \quad (28)$$

B) Electromagnetic structure of the proton

According to the meson theory the nucleon is surrounded by the pion cloud which is extended to a distance of an order of the pion Compton wave length. Therefore the electron-nucleon scattering with high momentum transfer ($q \gtrsim 200$ Mev/c) will reveal the extended electromagnetic structure of the nucleon. HOFSTADTER et al have performed the high energy electron-proton scattering and in fact discovered the finite extension of the charge and magnetic moment distributions of the proton [102]. The differential electron-nucleon cross-section is

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} = & \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_M \left\{ F_1^2(q^2) + \frac{q}{4m^2} \left[2(F_1(q^2) + \mu_N F_2(q^2))^2 \tan^2 \frac{\theta}{2} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \mu_N^2 F_2^2(q^2) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (29)$$

where $(d\sigma/d\Omega)_M$ is the Mott-scattering cross-section

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_M = \left(\frac{e^2}{2E_0}\right)^2 \frac{\cos^2 \Theta/2}{\sin^4 \Theta/2} \frac{1}{1 + \frac{2E_0}{m} \sin^2 \frac{\Theta}{2}}. \quad (30)$$

E_0 is the incident electron energy and Θ the scattered angle both in the laboratory system. The formula of the differential cross-section for the point nucleon with the magnetic moment μ_N is called the Rosenbluth formula [108], and is obtained from Eq. (29) by putting $F_1(q^2) = F_2(q^2) = 1$.

The deviations of the measured angular distribution from the Rosenbluth formula enable one to obtain the proton form factors $F_1(q^2)$ and $F_2(q^2)$. In Fig. 12 the

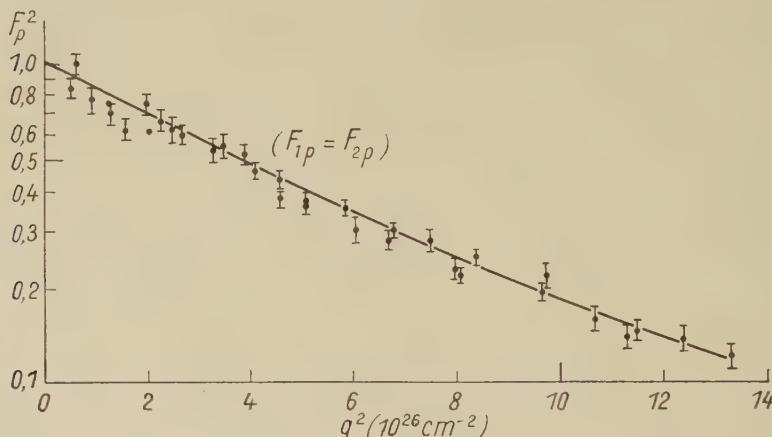


Fig. 12. The proton form factor F_p^2 derived from the electron-proton scattering data assuming $F_1 = F_2 = F_p$ [102].

thus obtained form factors are shown. The two form factors F_1 and F_2 of the proton are nearly equal at least up to $q^2 \approx 14 \times 10^{26} \text{ cm}^{-2}$, but a significant deviation was reported recently for higher q^2 . Since the form factors are measured accurately for smaller q^2 , the second moments of the distributions were first determined:

$$\sqrt{\langle r^2 \rangle} \approx 0.80 \times 10^{-13} \text{ cm} \quad \text{both for } F_1 \text{ and } F_2.$$

The various phenomenological distributions $\varrho(r)$ and $\mu(r)$ are proposed, which fit nicely with the measured $F_i(q^2)$ [102]. For example, they are

$$\varrho(r) = \varrho_0 \exp(-\sqrt{12} r / \sqrt{\langle r^2 \rangle}),$$

and

$$\varrho(r) = \frac{\eta \varkappa^2}{4\pi} \frac{e^{-\varkappa r}}{r} - (\eta - 1) \delta(r)$$

$$(\eta = 1.2, \sqrt{\langle r^2 \rangle} = \sqrt{6\eta} / \varkappa).$$

C) Electromagnetic structure of the neutron

The finite second moment of the charge distribution of the neutron has been known since the low energy neutron scattering by atoms was performed and the neutron-electron-interaction became known [109]. The scattering amplitude of the slow neutron by the static electric field of an electron is

$$a_e = -2me^2 \left\{ \frac{1}{6} \langle r_1^2 \rangle_n + \frac{\mu_n}{(2m)^2} \right\}. \quad (31)$$

The second term is called the Foldy term [105], [110] and is proportional to μ_n . The Zitterbewegung of the neutron with the anomalous magnetic moment μ_n induces the second order moment of the charge

$$\langle r^2 \rangle_{\text{Foldy}} = \frac{3}{2m^2} \cdot \mu_n = -0.13 \times 10^{-26} \text{ cm}^2.$$

Historically the magnitude of the neutron-electron interaction is expressed as the depth V_0 of the hypothetical square well potential with a radius e^2/m_e . Since the scattering amplitude a_e by the potential is $a_e = -(2mV_0/3)(e^2/m_e)^3$, we obtain

$$V_0 = \frac{e^2}{2} \left(\frac{m}{e^2} \right) \{ \langle r_1^2 \rangle_n + \langle r_1^2 \rangle_{\text{Foldy}} \}. \quad (32)$$

The experimental value of $V_0 (= -4.050 \pm 200 \text{ ev})$ [110], [111] is almost explained by the Foldy term ($V_{0,\text{FOLDY}} = -4.080 \text{ ev}$). Therefore, the neutron-electron potential due to the intrinsic charge distribution of the neutron is small $V_{0,\text{intrinsic}} = 30 \pm 200 \text{ ev}$, leading to the small second moment of the charge distribution:

$$\langle r_1^2 \rangle_n = (0.001 \pm 0.006) \times 10^{-26} \text{ cm}^2.$$

The other source of informations on the neutron structure is the elastic and inelastic electron scatterings by the deuteron at high energies. The effect of the electron scattering by the proton in the deuteron is eliminated by using the proton form factors obtained by the electron-proton scattering. The data of the elastic electron-deuteron scattering up to $q \approx 2.9 \times 10^{13} \text{ cm}^{-1}$ [112] are consistent with $F_{1n} = 0$ and $\langle r_1^2 \rangle_p \approx (0.8 \times 10^{-13} \text{ cm})^2$. HOFSTADTER et al [102] measured the inelastic electron-deuteron scattering and the results are consistent with $F_{1p} = F_{2p} = F_{2n}$ and $F_{1n} = 0$ up to $q = 3.8 \times 10^{13} \text{ cm}^{-1}$. In Fig. 13 F_{2n} obtained by the experiments is plotted as a function of q^2 .

The experimental errors of $F_i(q^2)$ are large, in particular, for $F_{1n}(q^2)$. An example of the neutron charge distribution [113], [114] which fits with the experimental data and gives $\langle r_1^2 \rangle_n = 0$ is

$$\varrho_n(r) = -\frac{\alpha^3}{8\pi} e^{-\alpha r} + \frac{\beta^2}{\alpha^2} \frac{\beta^3}{8\pi} e^{-\beta r} - \left[\left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^2 - 1 \right] \delta(\mathbf{r}),$$

where

$$0.85\alpha < \beta < 1.20\alpha.$$

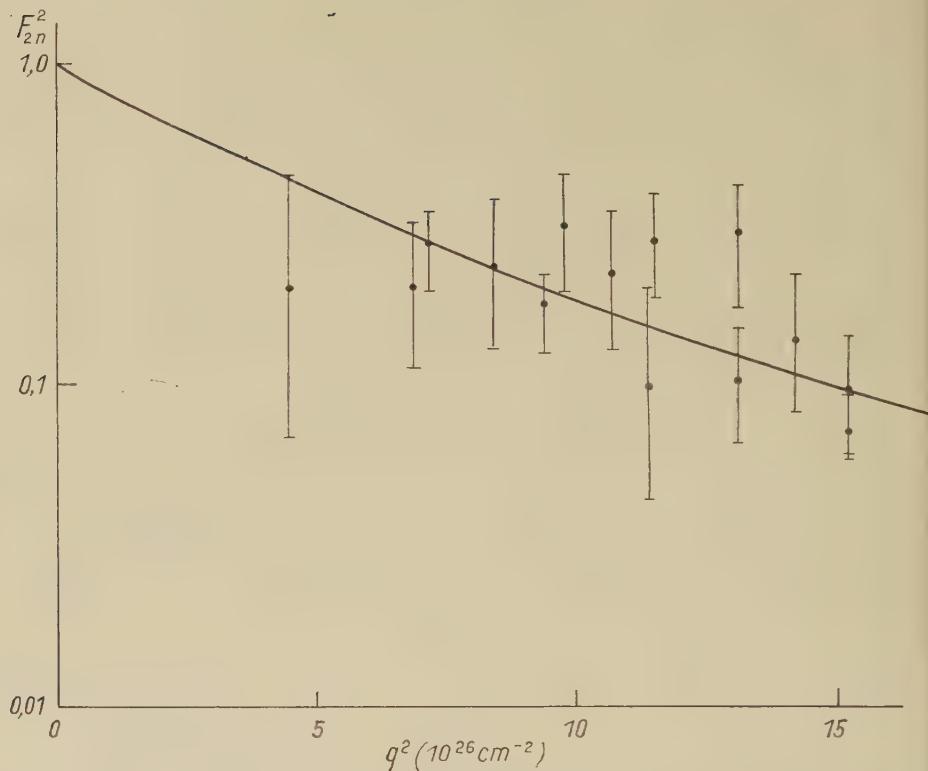


Fig. 13. The neutron magnetic form factor F_{2n}^2 derived from the experimental data of electron-deuteron inelastic scattering, $F_{1n} = 0$ being assumed [102].

D) Summary of the experimental facts on the electromagnetic structure of the nucleon

It is convenient for us to divide the form factors of the nucleon into the isoscalar and isovector parts, since the pion cloud contributes to only the latter as far as the charge independence of the pion-nucleon interaction being valid:

$$G_{1,2}(q^2) = G_{1,2}^S(q^2) + \tau_3 G_{1,2}^V(q^2). \quad (33)$$

Their values at $q^2 = 0$ are

$$\begin{aligned} G_1^S(0) &= G_1^V(0) = \frac{e}{2}, \\ G_2^S(0) &= \frac{\mu_p + \mu_n}{2} \frac{e}{2m} = \mu_s \frac{e}{2m} = -0.06 \frac{e}{2m}, \\ G_2^V(0) &= \frac{\mu_p - \mu_n}{2} \frac{e}{2m} = \mu_v \frac{e}{2m} = 1.85 \frac{e}{2m}. \end{aligned} \quad (34)$$

The second moments of $G_i^{\text{S,V}}$ are defined by

$$\langle r_i^2 \rangle^{\text{S,V}} = -6 \frac{G'_i{}^{\text{S,V}}(0)}{G_i^{\text{S,V}}(0)} \quad (i = 1, 2), \quad (35)$$

which are written as

$$\begin{aligned} \langle r_1^2 \rangle^{\text{S}} &= \langle r_1^2 \rangle^{\text{p}} + \langle r_1^2 \rangle^{\text{n}}, \quad \langle r_1^2 \rangle^{\text{V}} = \langle r_1^2 \rangle^{\text{p}} - \langle r_1^2 \rangle^{\text{n}}, \\ 2\mu_s \langle r_2^2 \rangle^{\text{S}} &= \mu_{\text{p}} \langle r_2^2 \rangle^{\text{p}} + \mu_{\text{n}} \langle r_2^2 \rangle^{\text{n}}, \quad 2\mu_v \langle r_2^2 \rangle^{\text{V}} = \mu_{\text{p}} \langle r_2^2 \rangle^{\text{p}} - \mu_{\text{n}} \langle r_2^2 \rangle^{\text{n}}. \end{aligned} \quad (36)$$

The experimental results $F_{1\text{p}} = F_{2\text{p}} = F_{2\text{n}}$ and $\sqrt{\langle r_{1\text{p}}^2 \rangle} \approx 0.80 \times 10^{-13} \text{ cm}$ can be summarized as

$$\langle r_1^2 \rangle^{\text{V}} \approx \langle r_1^2 \rangle^{\text{S}} \approx \langle r_2^2 \rangle^{\text{V}} \approx (0.32 \pm 0.03) \frac{1}{\mu^2}.$$

The values of $\langle r^2 \rangle$ could be subject to large errors since they are obtained by extrapolating the measured $G_i(q^2)$ to $q^2 = 0$ and taking the derivative of $G_i(q^2)$ by q^2 at $q^2 = 0$. An unusual extrapolation could give a quite different value of $\langle r^2 \rangle$ from the one above although it is unlikely and, therefore, it might be better for us to discuss directly $G_i(q^2)$ [115].

§ 5. Theory of the Electromagnetic Structure of the Nucleon I

— isovector part —

A) General remarks

In this and the next sections we shall discuss the observed nucleon form factors in terms of the pion theory. According to the present pion theory the structure of the nucleon becomes more complicated for shorter distances from the centre of the nucleon and furthermore the other fields such as the K and hyperon fields would become increasingly important. Also no real evidence for validity of the local field theory has been seen. Therefore what one can hope to the pion theory is to understand the outer structure of the nucleon, namely the form factors for small momentum transfer and the higher moments of the charge and magnetic moment distributions. For example one expects to understand quantitatively the second moment of the anomalous magnetic moment $\langle r_2^2 \rangle$ of the nucleon but not the total anomalous magnetic moment itself. (Because of this situation the experimental value of $G_2(0)$ will be used for the expression of $\langle r_2^2 \rangle$ (Eq. (35) instead of the theoretical one [116]).

If we use the local field theory where the causality principle is strictly valid, then we obtain the dispersion formula for the form factors:

$$\begin{aligned} G_1^{\text{V,S}}(q^2) &= \frac{e}{2} - \frac{q^2}{\pi} \int \frac{g_1^{\text{V,S}}(\sigma^2)}{\sigma^2(\sigma^2 + q^2 - i\varepsilon)} d\sigma^2, \\ G_2^{\text{V,S}}(q^2) &= \frac{1}{\pi} \int \frac{g_2^{\text{V,S}}(\sigma^2)}{\sigma^2 + q^2 - i\varepsilon} d\sigma^2. \end{aligned} \quad (37)$$

There has been no general proof of this formula [117], but the perturbation calculation verifies the relation in its successive approximations [118]. Therefore we shall assume the validity of Eq. (37) hereafter.

The spectral functions $g_{1,2}(\sigma^2)$ can be written as $g_{1,2}(\sigma^2) = \sum_n \langle \bar{N} \bar{N} | n \rangle \langle n | \gamma \rangle$, where n is an eigenstate of the total Hamiltonian and the summation is over those states which can make transitions both to the nucleon pair ($\bar{N} \bar{N}$) state and the one γ state and have necessarily the total angular momentum $J = 1$, parity $P = \text{odd}$, and isotopic spin 0 or 1 [119], [120]. Also the square of the total four-momentum of the state n must be equal to σ^2 . A Feynman diagram representing a transition of a nucleon in an electromagnetic field made by a virtual γ -ray with the four momentum $q (q^2 = \sigma^2)$ does also imply a transition of the nucleon pair becoming into the γ ray. This can occur through various intermediate states n . The denominator $(\sigma^2 + q^2 - i\varepsilon)^{-1}$ of Eq. (37) is the propagator of the n -state with the effective mass σ and the $\langle \bar{N} \bar{N} | n \rangle$ and $\langle n | \gamma \rangle$ are the amplitudes of the n -state decaying into the $\bar{N} \bar{N}$ and γ states respectively.

The Fourier transforms of Eq. (37) give us the charge and magnetic moment distributions in terms of the spectral functions $g_{1,2}(\sigma^2)$:

$$\begin{aligned}\varrho^{v,s}(r) &= \left[\frac{e}{2} - \frac{1}{\pi} \int \frac{d\sigma^2}{\sigma^2} g_1(\sigma^2) \right] \delta(r) + \frac{1}{2\pi^2} \int g_1^{v,s}(\sigma^2) \frac{e^{-\sigma r}}{r} d\sigma^2, \\ \mu^{v,s}(r) &= \frac{1}{2\pi^2} \int g_2^{v,s}(\sigma^2) \frac{e^{-\sigma r}}{r} d\sigma^2.\end{aligned}\quad (38)$$

The amount of charge localized at the origin¹⁾ is equal to $G_1^{v,s}(\infty)$. If no such localization is found, then the no-subtraction dispersion formula such as the one for $G_2(q^2)$ can be used for $G_1(q^2)$. On the other hand if we find the localized charge, it must be due to the bare proton at the origin and therefore exists only for the proton form factor. The probability Z_2 for finding the bare proton is related with $G_1^{v,s}(\infty)$ as follows [116]:

$$\begin{aligned}Z_2 e &= G_1^v(\infty) + G_1^s(\infty) = e - \frac{1}{\pi} \int \frac{g_1^s(\sigma^2) + g_1^v(\sigma^2)}{\sigma^2} d\sigma^2, \\ 0 &= G_1^v(\infty) - G_1^s(\infty) = \frac{1}{\pi} \int \frac{g_1^s(\sigma^2) - g_1^v(\sigma^2)}{\sigma^2} d\sigma^2.\end{aligned}\quad (39)$$

As is known from Eq. (38) the contributions of the intermediate states n with small σ^2 give long range distributions of $\varrho(r)$ and $\mu(r)$. The states with least σ^2 are the two pion states for the isovector ($I = 1$) part and the three pion states for the isoscalar part ($I = 0$). The lower bounds of σ^2 are $(2\mu)^2$ and $(3\mu)^2$, respectively. For higher σ^2 more different types of states such as many pion states and many nucleon pair states begin to contribute and we have to deal with increasingly complex phenomena.

¹⁾ As stated before the charge density $\varrho(r)$ is different from the ordinary one for small r . And the localized charge at the origin spreads to a distance of an order of $1/2m$ due to the Zitterbewegung of the Dirac particle.

B) The static theory of the isovector part of the nucleon form factors

Let us first discuss the isovector part of the form factors based on the static theory [121], [122], [123], [124]. In this theory pions in the cloud are in p-state and the recoil of the nucleon core and its pair production are neglected. The wave function of the proton is a superposition of no pion state, one pion state, and so on. The n -pion state is further divided according to the charge and the z -component of the angular momentum of each of the pions;

$$\begin{aligned} n &= n_{\pi^+} + n_{\pi^0} + n_{\pi^-}, \\ n_{\pi^+} &= n_{\pi^+\uparrow} + n_{\pi^+\rightarrow} + n_{\pi^-\downarrow}, \quad \text{etc.} \end{aligned}$$

The wave function of the neutron is obtained from that of the proton by the substitutions $\pi^+ \leftrightarrow \pi^-$ and the proton core \leftrightarrow neutron core. Therefore the pion contributions to the charge and anomalous magnetic moment are opposite for the proton and neutron and are exclusively of isovector character.

The anomalous magnetic moment due to the pion current of this n -pion state is

$$\mu_v = (n_{\pi^+\uparrow} - n_{\pi^-\downarrow} - n_{\pi^-\uparrow} + n_{\pi^+\downarrow}) \frac{m}{\langle \omega_\pi \rangle} \frac{e}{2m}, \quad (40)$$

where $\langle \omega_\pi \rangle$ is the average energy of the pion in the cloud. The mean square radius of the nucleon charge distribution is

$$\langle r_1^2 \rangle_\pi = 2(n_{\pi^+} - n_{\pi^-}) \langle r_\pi^2 \rangle, \quad (41)$$

where $\langle r_\pi^2 \rangle$ is the mean square radius of one pion in the cloud.¹⁾

When the cloud is mostly composed of one pion state, we obtain

$$\begin{aligned} n_{\pi^+} &= \frac{2}{3} P \left(n_{\pi^+\uparrow} = \frac{4}{9} P, \quad n_{\pi^+\rightarrow} = \frac{2}{9} P, \quad n_{\pi^-\downarrow} = 0 \right), \\ n_{\pi^0} &= \frac{1}{3} P, \quad n_{\pi^-} = 0, \end{aligned}$$

where P is the probability of one pion state.

Even in this very simple one pion state model the isovector part of the charge and anomalous magnetic moment were understood reasonably well;
e.g., by taking $P \approx 100\%$, $\langle \omega \rangle \approx 2\mu$ and $\langle r^2 \rangle \approx 1/(2\mu)^2$, we obtain²⁾

$$\mu_v \approx 1.5 \frac{e}{2m}, \quad \langle r_1^2 \rangle \approx 0.33 \frac{1}{\mu^2}.$$

¹⁾ In general the values of $\langle \omega_\pi \rangle$ and $\langle r_\pi^2 \rangle$ are different for the different charge and z -component of the angular momentum of the pion. Only when the cloud is exclusively composed of one pion state, these differences disappear.

²⁾ If we add the contribution from the nucleon core spin $(\mu_v = -\frac{4}{9} P \frac{e}{2m})$, we obtain $\mu_v \approx 1.05 \frac{e}{2m}$.

The average numbers of pions in the nucleon state were calculated in the static theory [121], [124]. They can be expressed in terms of the renormalized coupling constant f and the p-wave pion-nucleon scattering cross-sections. The calculated values are given in Table V for two different values of the cut-off momentum K . The perturbational value is defined as the one depending explicitly on f and the correction term is one depending on the p-wave cross-sections.

Table V. The average number of pions in the nucleon cloud

	$K = 5\mu$			$K = 6\mu$		
	pert.	corr.	sum	pert.	corr.	sum
n_{π^+}	0.51	0.09	0.60	0.78	0.14	0.92
n_{π^0}	0.26	0.17	0.43	0.39	0.28	0.27
n_{π^-}	0	0.26	0.26	0	0.42	0.42
n_π	0.77	0.52	1.29	1.17	0.84	2.01

The average number of pions with the specified charge, angular momentum and wave number is given by $\langle \mathbf{N} | d^* d | \mathbf{N} \rangle$, where \mathbf{N} is the physical nucleon state and d^* and d are the creation and annihilation operators of the specified pion. This expectation value can be calculated if $d|\mathbf{N}\rangle$ is expressed in terms of known quantities. For doing this we expand $d|\mathbf{N}\rangle$ in terms of the eigenstates $|n\rangle$ of the total Hamiltonian, $d|\mathbf{N}\rangle = \sum_n \alpha_n |n\rangle$, and approximate it by taking the summation only over the nucleon state $|\mathbf{N}\rangle$ and the $|\mathbf{N}_1\rangle$ resonant state;

$$\alpha |\mathbf{N}\rangle \approx \alpha_1 |\mathbf{N}\rangle + \alpha_2 |\mathbf{N}_1\rangle.$$

Then according to Chew-Low formalism α_1 and α_2 are expressed by f^2 and the $|\mathbf{N}_1\rangle$ -resonant scattering phase shift, respectively. The perturbation term in Table V is due to the former and the correction term to the latter.

The ratios $n_{\pi^+} : n_{\pi^0} : n_{\pi^-}$ of the perturbation term or the correction term in Table V can be understood in the following way. Assuming $|\mathbf{N}_1\rangle$ as a real particle, the above approximate expansion of $d|\mathbf{N}\rangle$ corresponds in the weak coupling limit to expand the physical nucleon state by $|\mathbf{N}\rangle \approx \beta_0 |\tilde{\mathbf{N}}\rangle + \beta_1 |\tilde{\mathbf{N}}\pi\rangle + \beta_2 |\tilde{\mathbf{N}}_1\pi\rangle$. Here $\tilde{\mathbf{N}}$ and $\tilde{\mathbf{N}}_1$ are the bare nucleon and \mathbf{N}_1 particle states respectively and the α_1 and α_2 terms correspond to the β_1 and β_2 terms of $d|\mathbf{N}\rangle$ respectively. Since the $|\tilde{\mathbf{N}}\pi\rangle$ and $|\tilde{\mathbf{N}}_1\pi\rangle$ states must have $I = J = 1/2$, the $|\tilde{\mathbf{N}}\pi\rangle$ state gives the ratio $n_{\pi^+} : n_{\pi^0} : n_{\pi^-} = 2:1:0$ and $|\tilde{\mathbf{N}}_1\pi\rangle$ state the ratio 1:2:3 for the physical proton. Although we have discussed the ratios in the weak coupling limit, the arguments are valid irrespective of the magnitude of the coupling constant. And, in fact, these ratios coincide with those of Table V.

The same ratios are valid for the number of pions with the different z component of angular momentum. For a given charge the perturbation term gives $n_\uparrow : n_\rightarrow : n_\downarrow = 2:1:0$ and the correction term gives $n_\uparrow : n_\rightarrow : n_\downarrow = 1:2:3$.

The results of the similar calculation for the Q_v , $\langle r_1^2 \rangle_v$, μ_v , and $\langle r_2^2 \rangle_v$ are shown in Table VI, where Q_v is the total pion charge carried by the pion cloud [116]. Corrections due to the $(3/2, 3/2)$ resonant scattering (rescattering corrections) are small and at most of an order of 30% of the perturbation term. The increases of μ_v and $\langle r_2^2 \rangle_v$ due to the rescattering corrections owe mainly to the increase

Table VI. The values of Q_v , $\langle r_1^2 \rangle_v$, μ_v and $\langle r_2^2 \rangle_v$ in the static theory calculated in the ref. [116].

	Unit	$K = 5\mu$			$K = 6\mu$		
		pert.	corr.	sum	pert.	corr.	sum
Q_v	e	0.50	-0.11	0.39	0.80	-0.22	0.58
$\langle r_1^2 \rangle_v$	$\frac{1}{\mu^2}$	0.31	-0.05	0.26	0.34	-0.05	0.29
μ_v	$\frac{e}{2m}$	1.26	0.10	1.36	1.70	0.15	1.85
$\langle r_2^2 \rangle_v$	$\frac{1}{\mu^2}$	0.20	0.01	0.21	0.21	0.01	0.22

of n (Table V). On the other hand $\langle r_1^2 \rangle_v$ decreases because the correction increases n_{π^-} most.

The perturbation calculation does not correspond to the simple one pion state model. Because the magnetic moment and charge operators contain the pion pair annihilation and creation terms, the contributions due to Feynman diagrams

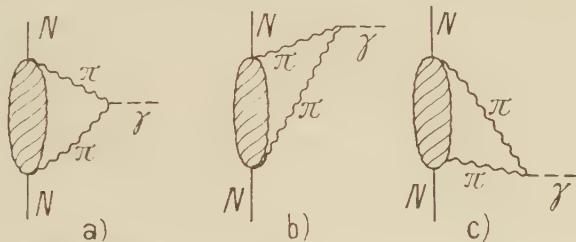


Fig. 14. The Feynman graphs representing the contribution of the pion current to the electromagnetic structure of the nucleon.

Fig. 14b and Fig. 14c are added to that of the diagram Fig. 14a. For example, the number of π^+ with a momentum $k \sim k + dk$ and a z-component of the angular momentum +1 is equal to

$$n_{\pi^+}(k) dk = \frac{4\pi}{3} f^2 \frac{k^4}{\mu^2 \omega^2} dk.$$

On the other hand the magnetic moment by these π^+ is

$$\mu_v \frac{e}{2m} = 2 \int_0^K \frac{e}{2\omega} n_{\pi^+}(k) dk,$$

where the factor 2 comes from the contributions of the diagrams Fig. 14b and Fig. 14c.

The results of Table VI show that the static theory explains reasonably well the isovector part of the electromagnetic structure of the nucleon for a proper choice of the cut-off momentum K . But if we go into more details, the calculated value

of $\langle r_2^2 \rangle_v$ is significantly smaller than the experimental value of $\langle r_2^2 \rangle_v$ and also the calculated μ_v is smaller than the experimental μ_v unless we take a large cut-off momentum K . The mean square radii of the charge and magnetic moment distributions (Table VI) depend rather insensitively on the cut-off momentum and therefore are reliable unless other interactions such as the s-wave pion-nucleon interaction and the pion-pion interaction play important roles. Thus the discrepancy between the calculated $\langle r_2^2 \rangle_v$ and the observed $\langle r_2^2 \rangle_v$ indicates that an effect such as the pion-pion interaction must play an important role. On the other hand the calculated values of the magnetic moment and Q_v depend sensitively on K and no reliable statement can be made on them based on the static theory.

C) Relativistic perturbation theory

Let us now discuss the relativistic corrections to the results of the static theory. Since no general treatment accessible to handle has been found, we use the lowest order

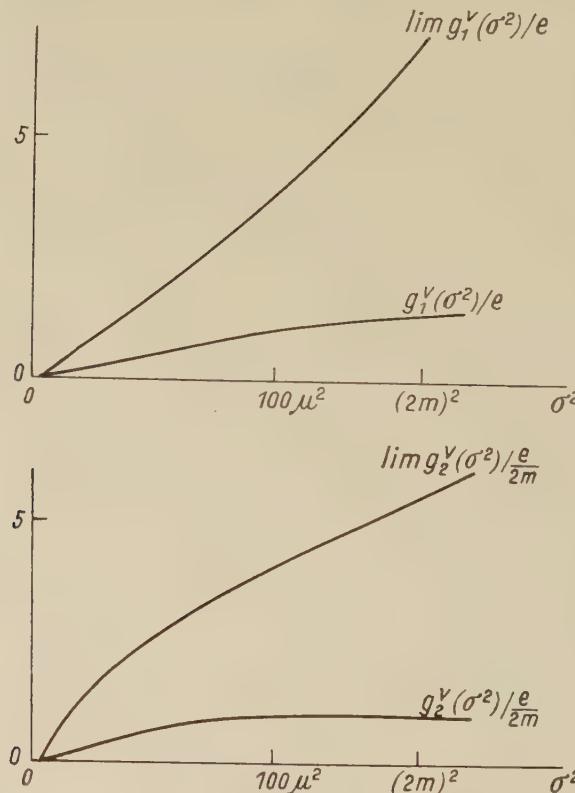


Fig. 15. The spectral function of the nucleon form factors (pion current contribution). $g_{1,2}^V(\sigma^2)$ are calculated with the relativistic perturbation theory and $\lim g_{1,2}^V(\sigma^2)$ are their static limits.

relativistic perturbation calculation [125], [116]. By evaluating the spectral functions $g_{1,2}^V(\sigma^2)$ due to the two pion intermediate states in perturbation we can obtain the results of the ordinary perturbation calculation. In Table VII the calcu-

lated values of $\langle r_{1,2}^2 \rangle_v$, μ_v , and Q_v are given for the relativistic cut-off momentum $\sigma_{\max} = 2 m$ and for the no cut-off case [120], [126].

Table VII. The values of Q_v^v , $\langle r_1^2 \rangle_v$, μ_v , and $\langle r_2^2 \rangle_v$ in the relativistic perturbation calculation¹⁾ [120], [126].

	unit	no cut-off	$\sigma_{\max} = 2 m$
Q_v^v	e	∞	0.64
$\langle r_1^2 \rangle_v$	$\frac{1}{\mu^2}$	0.24	0.19
μ_v	$\frac{e}{zm}$	1.6	0.87
$\langle r_2^2 \rangle_v$	$\frac{1}{\mu^2}$	0.10	0.10

The results of the relativistic calculation of $g_{1,2}^v(\sigma^2)$ are quite different from those of the static theory. The perturbation values of the spectral functions in the both calculations are compared in Fig. 15. The relativistic corrections to the calculation consist of two effects; the recoil effect due to the finite nucleon mass and the effect of the nucleon pair formation. HIIIDA et al [127] compared $\lim_{m \rightarrow \infty} [g_{1,2}^v(\sigma^2)]_{\text{rel}}$ with $[g_{1,2}^v(\sigma^2)]_{\text{static}}$

$$\begin{aligned} [g_1^v(\sigma^2)]_{\text{static}} &= \frac{f^2}{6\pi} \left\{ 5 \frac{\sigma}{\mu} - 8 \left(\frac{\sigma}{\mu} \right)^{-1} \right\} \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2\mu} \right)^2 - 1}, \\ \lim_{m \rightarrow \infty} [g_1^v(\sigma^2)]_{\text{rel}} &= \frac{f^2}{\pi} \left\{ \frac{\sigma}{\mu} - 2 \left(\frac{\sigma}{\mu} \right)^{-1} \right\} \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2\mu} \right)^2 - 1}, \\ [g_2^v(\sigma^2)]_{\text{static}} &= \lim_{m \rightarrow \infty} [g_2^v(\sigma^2)]_{\text{rel}} \\ &= \frac{f^2}{4} \frac{m}{\mu} \left\{ \frac{\sigma}{\mu} - 4 \left(\frac{\sigma}{\mu} \right)^{-1} \right\}. \end{aligned} \quad (42)$$

Since the recoil effect disappears for $m \rightarrow \infty$, the difference between $[g_1^v(\sigma^2)]_{\text{static}}$ and $\lim_{m \rightarrow 0} [g_1^v(\sigma^2)]_{\text{rel}}$ is entirely due to the s-wave pion cloud accompanied with the nucleon pairs (Fig. 16 b). The difference is less than 20% of $[g_1^v]_{\text{static}}$ for all σ^2 and thus HIIIDA et al concluded that the pair effect is unimportant. As for $g_2^v(\sigma^2)$ no difference exists, since the s-wave pion cloud does not contribute to the anomalous magnetic moment of the nucleon.

Because the pair effect could be reduced much by taking the limit of $m \rightarrow \infty$, we must be careful to conclude that the pair effect is small. Conversely the interesting arguments by Goto showed that the pair effect may be more important than the recoil effect. Several years ago Goto [128] made a relativistic perturbation

¹⁾ The values of $\langle r_2^2 \rangle_v$ are normalized by the experimental value of μ_v and therefore the values in the last row differ from those of the references.

calculation of μ_v by separately evaluating the p-wave pion (no-pair) term $\mu_v^{(+)}$ and the s-wave (pair) term $\mu_v^{(-)}$ (Fig. 16a and Fig. 16b):

$$\mu_v = \mu_v^{(+)} + \mu_v^{(-)} = \frac{g^2}{\pi} (J_M^{(+)} + J_M^{(-)}) (g^2 \approx 15),$$

$$J_M^{(\pm)} = \int_0^\infty \frac{dk}{m} F^{(\pm)} \left(\frac{k}{m} \right),$$

where $F^{(\pm)}(k/m)$ is plotted in Fig. 17.

The pair term $F^{(-)}(k/m)$ becomes larger than $F^{(+)}(k/m)$ for $k \gtrsim m$ and the magnetic moment μ_v depends very much on the cut-off momentum. In Table VIII the calculated values $\mu_v^{(+)}$, $\mu_v^{(-)}$ and μ_v are shown for the cut-off momentum¹⁾ $K = m$ and the no cut-off. The cut-off dependence is mainly due to the pair term. Thus unless we take a very small cut-off momentum, the strong cutoff dependence of μ_v as well as the

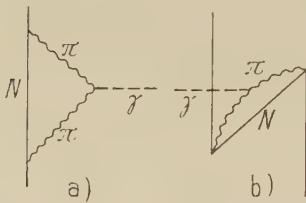


Fig. 16. The Feynman graphs representing the contribution of the pion current. Figs. (a) and (b) represent the effects of p- and s-wave pions, respectively.

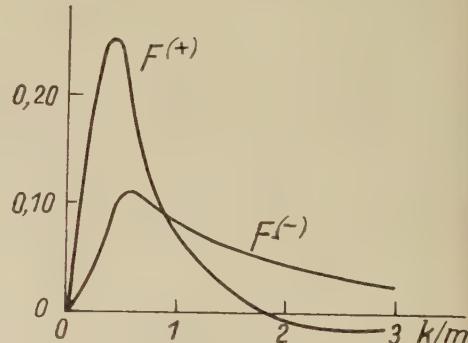


Fig. 17. The integrand functions $F^{(\pm)}(k/m)$ in the calculation of the anomalous magnetic moment. $F^{(+)}$ and $F^{(-)}$ represent the effects of p- and s-wave pions respectively.

relatively weak dependence of $\langle r_2^2 \rangle_v$ are due to the pair terms and the ordinary recoil effects are rather insensitive to the choice of the cut-off momentum.

Table VIII. The values of the no-pair term and pair term of μ_v in the relativistic perturbation calculation by GOTO [128].

	unit	no cut-off	$K = m$
$\mu_v^{(+)}$	$e/2m$	0.57	0.72
$\mu_v^{(-)}$	$e/2m$	1.1	0.35
μ_v	$e/2m$	1.7	1.1

FEDERBUSH et al [120] calculated the 2π state contribution to the spectral functions $g_{1,2}^v(\sigma^2)$ beyond the perturbation method. The contribution can be written as

$$g_{1,2}^v(\sigma^2) \propto \text{Re} [F_\pi^*(-\sigma^2) \langle \pi\pi | N\bar{N} \rangle],$$

¹⁾ Here the cut-off momentum is the three dimensional one and different from the relativistic cut-off momentum σ_{\max} . The reason why the value of μ_v for $K = m$ in Table VII is larger than μ_v for $\sigma_{\max} = 2m$ in Table VI is due to the different definition of the cut-off momentum.

where $F_\pi(q^2)$ is the pion form factor and $\langle \pi\pi | N \bar{N} \rangle$ is the matrix element for the scattering of $N \bar{N}$ into 2π with $I = J = 1$ and the total centre of the mass energy σ^2 . The $\langle \pi\pi | N \bar{N} \rangle$ corresponds to the real $NN \rightarrow 2\pi$ process when $\sigma^2 > (2m)^2$ and its magnitude is restricted by the unitarity condition. They concluded from this unitarity condition that the upper limit of the contribution to μ_v from 2π states with $\sigma^2 \geq 4m^2$ is $0.2 e/2m$. The corresponding perturbation result is $0.8 e/2m$, thus violating the unitarity.

In order to avoid the violation of the unitarity and to take most of the recoil effect into account (Fig. 17), we have shown the results of the relativistic perturbation calculations of Q_v , $\langle r_1^2 \rangle_v$, μ_v and $\langle r_2^2 \rangle_v$ for $\sigma_{\max} = 2m$ (Table VII). As it was the case for the static theory B), the values of $\langle r_{1,2}^2 \rangle_v$ and μ_v are significantly smaller than the experimental values, although they are of the right order of magnitudes. Since $\langle r_1^2 \rangle_v$ and $\langle r_2^2 \rangle_v$ are rather insensitive to the cut-off momentum σ_{\max} , an increase of σ_{\max} would help to increase μ_v but not $\langle r_1^2 \rangle_v$ and $\langle r_2^2 \rangle_v$. Thus the perturbation results are not in good agreement with the experiments and we need a certain effect which can increase μ_v as well as $\langle r_1^2 \rangle$ and $\langle r_2^2 \rangle$.

The higher order corrections and in particular the rescattering corrections due to the N_1 resonance were first discussed relativistically by OKUBO [129] and TANAKA [130] and then by CHEW et al [119], FEDERBUSH et al [120], and FRAZER et al [131]. They predicted various different magnitudes of the rescattering corrections, but no quantitatively reliable calculation exists. Since the static theory predicted the small rescattering correction and the N_1 resonance was adequately described within the frame work of the static theory, it would be allowed to assume that the actual rescattering correction is small.

D) Effect of the pion-pion interaction on the nucleon form factors

More important corrections to the form factors would come from the pion-pion interaction. Naively speaking if the pion has an extended structure, the pion contributions to the nucleon form factors would be greatly modified.

Before going into the discussion of the nucleon structure, we shall first discuss the electromagnetic structure of the pion itself. Partly for an illustration and partly for the strong pion-pion interaction in the $I = J = 1$ state being proposed, we shall use the phenomenological theory proposed in ref. [61]. The assumed $I = J = 1$ pion-pion resonance state is substituted by a vector field $\varphi^{+,0}$ and its interaction with the pion field $H_{\varphi\pi\pi}$ is introduced. The Feynman diagram Fig. 18a representing the pion electromagnetic structure is similar to the vacuum polarization diagram of the quantum electrodynamics. Since two pions with the same charge repel with each other through the φ field, the charge distribution of π^\pm due to the vacuum polarization diagram becomes such as is shown in Fig. 18b. The mean square radius of this charge distribution can be calculated in terms of the φ mass and the magnitude of the $\varphi\pi\pi$ coupling constant. FRAZER et al [131] and FEDERBUSH et al [120] made a dispersion-like treatment of the pion form factor and the result is

$$F_\pi(q^2) = \exp u_0(q^2),$$

where

$$u_0(q^2) = -\frac{q^2}{\pi} \int_{(2\mu)^2}^{\infty} \frac{\delta(\sigma^2) d\sigma^2}{\sigma^2(\sigma^2 + q^2 - i\varepsilon)}.$$

The $\delta(\sigma^2)$ is the pion-pion scattering phase shift in $I = J = 1$ state at the total centre of the mass energy σ . Assuming the resonant behaviour of δ with the resonance energy $\sigma_r \sim 470$ Mev and the width $\Gamma \sim 130$ Mev, they obtained $\langle r_\pi^2 \rangle = 0.44$ $1/\mu^2 = (0.93 \times 10^{-13} \text{ cm})^2$. If the pion has indeed such an extended structure, it gives a large effect on the nucleon structure.

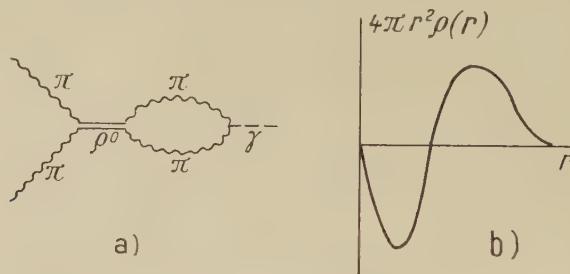


Fig. 18. The Feynman graph showing the electromagnetic structure of pion due to the ρ^0 -meson, and the schematic diagram of the charge distribution around the pion.

The effect of the pion-pion interaction on the nucleon form factor was first discussed by SACHS et al [132], [133] before the dispersion-like treatment has been developed. The nucleon wave function $|N\rangle$ can be expanded in the static theory as follows [132]:

$$|N\rangle = a_0 \psi^{(0)} + a_1 \psi^{(1)} + a_2 \psi^{(2)} + \dots,$$

where $\psi^{(n)}$ represents the n p-wave pions plus a bare nucleon state. If the strong pion-pion interaction exists, it would modify $\psi^{(n)}$ for $n \geq 2$. The charge or magnetic moment operator contains the off-diagonal elements connecting $\psi^{(n)}$ with $\psi^{(n \pm 2)}$ and we consider the simplest element, namely one between $\psi^{(0)}$ and $\psi^{(2)}$. By dividing $\psi^{(2)}$ according to the total angular momentum L (0 or 1) and isotopic spin I (0 or 1) of the two pions, we obtain

$$a_2 \psi^{(2)} = \sum_{I,L} C_{I,L}^{(2)} \psi_{I,L}^{(2)},$$

where $\psi_{I,L}^{(2)}$ are the normalized wave functions and $C_{I,L}^{(2)}$ are their amplitudes. The $\psi_{I,L}^{(2)}$ are the products of the isotopic spin wave function, the angular wave function, and the radial wave function. If we express the normalized radial wave function of $\psi_{I,L}^{(2)}$ by $g_{I,L}(1, 2)$, $g_{0,0}$ and $g_{1,1}$ are symmetric and $g_{0,1}$ and $g_{1,0}$ are antisymmetric for the interchange of the radial coordinates $1 \leftrightarrow 2$. The matrix elements of the anomalous magnetic moment and the mean square radius of the charge distribution due to the $\psi^{(0)} \rightarrow \psi^{(2)}$ pion current are [132], [122]

$$\langle |m_z| \rangle = \frac{e}{2\mu} \cdot 2 \operatorname{Re} (a_0^* C_{1,1}^{(2)}) \sqrt{\frac{2}{3}} I,$$

$$\langle |\varrho r^2| \rangle = e \cdot 2 \operatorname{Re} (a_0^* C_{1,0}^{(2)}) \sqrt{3} J,$$

where

$$I = - \sum_k \frac{\mu}{\omega} g_{1,1}(k, k),$$

$$J = - \sum_k \frac{2k}{\omega^2} \left(\frac{dg_{1,0}(k, k')}{dk} \right)_{k' = k}$$

The pion-pion interaction has two effects; one is to enhance the 2π state amplitude $C_{I,L}^{(2)}$ and another to correlate the two pion radial coordinates in such a way to increase the value of J or I .

Although HOLLADAY [133] showed that indeed the strong correlations of the two pions in $\psi^{(2)}$ are desirable to explain the anomalous magnetic moments of the nucleon and the proton-neutron mass difference, quantitatively unambiguous results are difficult to obtain along this line of argument. FRAZER and FULCO [131] investigated the same problems by using the dispersion approach. The spectral functions $g_i^v(\sigma^2)$ ($i = 1, 2$) of the nucleon form factors are expressed as

$$g_i^v(\sigma^2) = |F_\pi(-\sigma^2)|^2 \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{Im } J_i(\sigma'^2) d\sigma'^2}{(\sigma'^2 - \sigma^2 - i\varepsilon) F_\pi(-\sigma'^2)},$$

where

$$a = 4\mu^2 \left(1 - \frac{\mu^2}{4m^2}\right).$$

Here $J_i(\sigma^2)$ is a certain linear combination of the $N\bar{N} \rightarrow \pi\pi$ transition amplitudes in 3S_1 and 3D_1 states. Strong pion-pion interactions which give large values of $F_\pi(-\sigma^2)$ for small σ^2 enhance $g_i^v(\sigma^2)$ for small σ^2 , thus leading to large values of μ_v as well as $\langle r_{1,2}^2 \rangle_v$.

E) Summary of the iso-vector part of the nucleon form factor

Only the two pion contributions to the nucleon form factor have been discussed. In the static calculation of the two pion contributions the perturbation term is the most predominant and the rescattering correction is shown to be small. The relativistic recoil effect and the effect of S-wave pion current (pair term) are estimated in perturbation. Although the results are cut-off dependent, the obtained μ_v and $\langle r_{1,2}^2 \rangle_v$ for a proper choice of cut-off momentum, say $K = 2 m$, are of right order of magnitudes but still significantly smaller than the observed values. A role which increases both μ_v and $\langle r_2^2 \rangle_v$ is shown to be played by a strong pion-pion interaction.

Although the quantitative estimates of the rescattering, recoil, pair, and pion-pion interaction effects are certainly inaccurate, the qualitative features of the isovector part of the form factors described above may not be far from the real situation.

§ 6. Theory of the Electromagnetic Structure of the Nucleon II

— isoscalar part —

A) Introduction

In § 5 we have investigated the nucleon structure due to the pion current, which plays the most predominant role on the isovector part of the structure. On the other hand the isoscalar current must be due to the particles with non-zero hyperonic charge, namely, nucleons, K-mesons, and Ξ particles. Here we shall mostly study the isoscalar part of the nucleon structure due to the nucleon current.

The effect of the K-meson current on the nucleon structure was studied by various authors [134], [135], [120] but the effect is considered as rather small.

We divide the effects of the nucleon current into two; one is due to the nucleon core current and another is due to the polarization current of nucleon pairs produced by the pion field of the nucleon core. The latter corresponds to the isoscalar part of the $3\pi, 5\pi \dots$ contributions appearing in the dispersion theoretical approach.

The experimental results on the isoscalar part of the nucleon structure present us two difficult problems, the very small μ^s ($= -0.06 e/2m$) and the large $\langle r_1^2 \rangle^s$ ($\approx \langle r_1^2 \rangle^v \approx 0.32/\mu^2$). The following discussions are mainly concerned with these two problems.

B) Nucleon core current

In a similar way with the isovector case we shall start from the static approximation. The wave function of a physical nucleon $|N\rangle$ is expressed as

$$|N\rangle = \alpha_0 \psi_N + \sum \alpha_{I,L} \psi_{I,L},$$

where ψ_N is the bare nucleon state with no pion cloud and $\psi_{I,L}$ ($I, L = 0$ or 1) is the state where the pions in the cloud have the total isospin I and the total angular momentum L .¹⁾ The normalization condition is

$$|\alpha_0|^2 + \sum_{I,L} |\alpha_{I,L}|^2 = 1.$$

Assuming that the bare nucleon (core nucleon) has the equal mass with the physical nucleon, the isoscalar part of the anomalous magnetic moment due to the nucleon core is the expectation value of the nucleon spin current $(1/2)(e/2m)\sigma_z$ of the physical nucleon state $|N\rangle$.

Since

$$\langle |\sigma_z| \rangle = 1 - \frac{4}{3} (|\alpha_{01}|^2 + |\alpha_{11}|^2),$$

$$\langle |\tau_3| \rangle = 1 - \frac{4}{3} (|\alpha_{10}|^2 + |\alpha_{11}|^2),$$

$$\langle \tau_3 \sigma_z | \rangle = 1 - \frac{4}{3} (|\alpha_{01}|^2 + |\alpha_{10}|^2) - \frac{8}{9} |\alpha_{11}|^2,$$

we obtain

$$\mu_s = \frac{1}{2} \langle |\sigma_z - 1| \rangle \frac{e}{2m} = -\frac{2}{3} (|\alpha_{01}|^2 + |\alpha_{11}|^2) \frac{e}{2m}.$$

If the nucleon core current is the predominant part of μ_s , the experimental value $\mu_s = -0.06 (e/2m)$ requires that $|\alpha_{01}|^2 + |\alpha_{11}|^2 = 9\%$. This is called as the mirror theorem [132] and the small probability obtained presents us a great difficulty.

¹⁾ For simplicity we do not write those suffices of ψ which are necessary to differentiate states with the same I and L .

The average number of pions in the cloud (Table V) enables one to calculate μ_s . From the relation

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \langle |\tau_3| \rangle + n_{\pi^+} - n_{\pi^-}$$

and the calculated n_{π^\pm} for the cut-off momentum $K = 5\mu$,

$$n_{\pi^+} = 0.60 \quad \text{and} \quad n_{\pi^-} = 0.26,$$

we obtain

$$\langle |\sigma_z| \rangle = \langle |\tau_3| \rangle = 0.32 \quad \text{and} \quad \mu_s = -0.34 \frac{e}{2m}.$$

The probability becomes $|\alpha_{01}|^2 + |\alpha_{11}|^2 = 51\%$ instead of 9%.

The source of this discrepancy has been looked for by various authors. The effect of the recoil current of the nucleon core is small and furthermore its inclusion

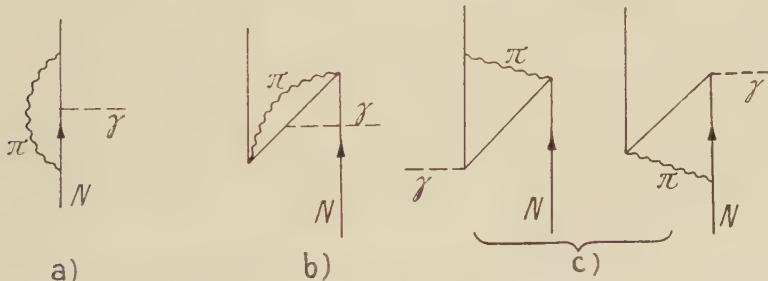


Fig. 19. The Feynman graphs representing the contribution of the nucleon current to the electromagnetic structure of the nucleon.

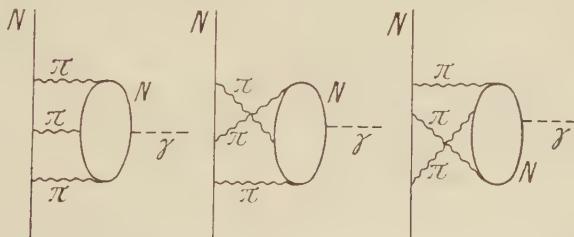


Fig. 20. The lowest order Feynman graphs of the contribution of polarized nucleon current to the electromagnetic structure of the nucleon.

requires more severe restrictions on the pion cloud [137]. The mass of the core nucleon may deviate significantly from the actual nucleon mass m . Such an effect may remove the difficulty if the bare nucleon mass m_0 is much smaller than m [136]. Since the s-wave pion interaction with the nucleon gives a positive selfenergy to the nucleon, one may be allowed to expect $m_0 \leq m$. No reliable argument or calculation exists for the value of m_0 .

The effects of the nucleon pairs are classified into the effects of the vacuum polarization pairs and of the pairs directly connected with the nucleon core. The former is represented by diagrams such as Fig. 20 and the latter by diagrams such as Figs. 19b and 19c. The relativistic lowest order perturbation calculation of the

nucleon current contribution to μ_s contains the contributions from Figs. 19b and 19c as well as Fig. 19a. The calculated value of μ_s is worse than the value of the static theory, indicating the pair effect is in bad direction and very large. GOTO made the same calculation [128], but separately calculating the contribution of ordinary core current $\mu_s^{(+)}$ (Fig. 19a) and that of the nucleon pair current $\mu_s^{(-)}$ (Figs. 19b and 19c). The results are shown in Table XI.

Table IX. The values of $\mu_s^{(+)}$, $\mu_s^{(-)}$ and μ_s calculated in the relativistic perturbation by GOTO [128].

	unit	no cut-off	$k_{\max} = m$
μ_s	$\frac{e}{2m}$	-1.68	-0.68
$\mu_s^{(+)}$	$\frac{e}{2m}$	-0.25	-0.24
$\mu_s^{(-)}$	$\frac{e}{2m}$	-1.43	-0.44

The value of $\mu_s^{(+)}$ is similar with that of the static theory and is insensitive on the cut-off momentum. On the other hand the pair term $\mu_s^{(-)}$ is very cut-off dependent and unreasonably large. The main cause of the large discrepancy between the calculated μ_s and the experimental value is the pair term as far as the relativistic perturbation theory is employed.

FEDERBUSH et al [120] made the similar consideration on the nucleon core current as that on the 2π contribution to $F_{1,2}^v(\sigma^2)$. The spectral functions $g_{1,2}(\sigma^2)$ are related with the nucleon-antinucleon scattering amplitude as follows¹⁾

$$g_{1,2}(\sigma^2) = \text{Re}(F_1^*(-\sigma^2)\langle N\bar{N}|N\bar{N}\rangle + F_2^*(-\sigma^2)\langle N\bar{N}|N\bar{N}\rangle),$$

and the unitarity condition on the scattering amplitude $\langle N\bar{N}|N\bar{N}\rangle$ gives us the upper limit of the nucleon current contributions to μ_s . The obtained result is very small, implying that the nucleon current contributes little to μ_s . The calculated results of μ_s and $\langle r_1^2 \rangle_s$ are given in Table X for the static and relativistic perturbation theories. Also the upper limits of μ_s and $\langle r_1^2 \rangle_s$ imposed by the unitarity condition are given. The results show that the static as well as relativistic perturbation calculations are apparently violating the unitarity condition and they are not to be trusted as far as the isoscalar nucleon current is concerned. However the very small upper limits on μ_s and $\langle r_1^2 \rangle_s$ obtained are difficult for us to understand²⁾ and it is desirable to clarify this point further.

¹⁾ The following expression comes not only from the core current but also from the part of the vacuum polarized nucleon pair current (C), when we calculate $\langle N\bar{N}|N\bar{N}\rangle$ beyond the lowest order perturbation.

²⁾ In obtaining the upper limits only the $N\bar{N} \rightarrow N\bar{N}$ scattering amplitude in 3S_1 state was taken into account and that in 3D_1 state was neglected. We think that this is a rather poor approximation, because the large and negative μ_s of the core current come from the spin-flip of the nucleon core by the pion emission or absorption and the limitation of $\langle N\bar{N}|N\bar{N}\rangle$ on the 3S_1 scattering amplitude corresponds to suppress the spin-flip very much.

Table X. The values of $\langle r_1^2 \rangle_s$ and μ_s due to the nucleon core current calculated in the static theory and the relativistic perturbation theory [120], [121].

	unit	static theory	rel. pert. theory	unitarity
$\langle r_1^2 \rangle_s$	$\frac{1}{\mu^2}$	—	0.11	$ \langle r_1^2 \rangle_s < 0.003$
μ_s	$\frac{e}{2m}$	-0.34	-1.69	$ \mu_s < 0.11$

C) Current of vacuum polarized nucleon pairs

— 3π state contribution —

According to the spectral representation of the nucleon form factors (Eq. (37)) the lowest massive intermediate states contributing to the isoscalar charge and magnetic moment distributions are the 3π states. The distributions extend to a distance of an order of $1/3\mu$ and other contributions by such as 5π , 7π , ... states do not reach to such a distance. The range of distribution due to the nucleon core current is very small and $\leq 1/2m$ (Eq. (38)). Thus the 3π state contributions are expected to explain most of the outer parts of the isoscalar distributions. The importance of the 3π state contributions was first emphasized by TAMM [138] and studied extensively by HIRADA et al [116].

The physical aspects of the 3π contributions may be illustrated by a model where the three pions are replaced by a neutral isoscalar vector meson ρ^0 [139]. The isoscalar charge and magnetic moment are due to the nucleon pairs produced in vacuum by the ρ^0 field of the nucleon. Since the nucleon has the isoscalar charge $+1/2$ and the antinucleon $-1/2$, the nucleons repel with each other and the antinucleon and nucleon attract. Thus the antiproton in the polarized vacuum is located nearer to the core nucleon than the proton in the vacuum, resulting in a positive charge distribution outside and a negative one inside. The total amounts of the charge of the two distributions are equal and opposite contrary to the vacuum polarized charge by a Coulomb field, where some of the charges disappear away into ∞ [140].

Although the 3π state contributions are different in detail from the polarized current by ρ^0 field, the qualitative features described above will be expected to remain. The outside distribution of the positive charge due to the proton in vacuum and the large range ($\lesssim 1/3\mu$) of the distribution are favourable to explain the large positive $\langle r_1^2 \rangle_s$.

The quantitative calculation of the 3π contributions are very difficult and only the perturbation calculations have been performed (Figs. 20) [116]. Since no quantitatively reliable method exists for calculating the nucleon loops in Figs. 20, a phenomenological method was proposed by various authors [116], [141], [142]. In this method the $3\pi - \gamma$ interaction through the nucleon loop is approximately represented by an effective interaction $H_{3\pi\gamma} = i4\pi e\lambda \cdot \epsilon\mu\nu\lambda_Q A_\mu \partial q_1 \cdot \partial x_\nu \cdot \partial q_2 / \partial x_\lambda \cdot \partial q_3 / \partial x_\nu$. The form of this effective interaction is obtained in the limit of long wave lengths of the three pions and γ -ray compared with the spatial extension of the nucleon loop. The value of λ should be determined phenomenologically and represents the effective radial dipole moment of the vacuum polarized nucleon pairs. The rela-

tivistic perturbation calculation of the nucleon loop gives $\lambda_{\text{pert}} = (8/\pi)f^3$, but no reasonable estimate of λ has been made.

Use of $H_{3\pi\gamma}$ simplifies the calculation of Figs. 20 and both the static [141] and relativistic [127], [142] calculation were performed in this approximation. HITDA

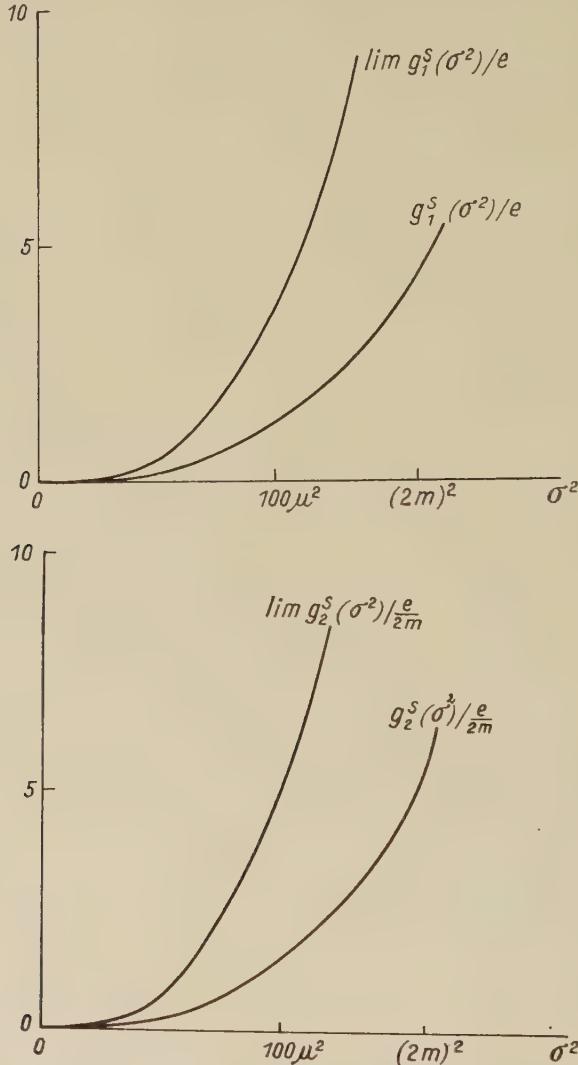


Fig. 21. The spectral functions of the isoscalar part of the nucleon form factors (contribution of the three-pion intermediate states). $g_{1,2}^S(\sigma^2)$ are calculated with the relativistic perturbation theory and $\lim_{m \rightarrow \infty} g_{1,2}^S(\sigma^2)$ are their static limits. The effective Hamiltonian $H_{3\pi\gamma}$ was used and λ was set equal to λ_{pert} .

et al [127] compared $[g_{1,2}^S(\sigma^2)]_{\text{static}}$ with $\lim_{m \rightarrow \infty} [g_{1,2}^S(\sigma^2)]_{\text{rel}}$ (Fig. 21a and Fig. 21b) and showed that the s-wave pion correction is less than 20% for all σ^2 . For the finite value of m this means that the s-wave pion correction is small for $\sigma^2 \ll (2m)^2$. On the other hand the s-wave effect represented by diagrams such as Fig. 22

would become very large for $\sigma^2 \gtrsim (2m)^2$ in the lowest perturbation and the higher order corrections must be included before to draw any conclusion on the magnitude of the s-wave effect. Therefore we take a cut-off momentum $\sigma_{\max} = 2m$ and show the calculated values of Q_s , $\langle r_1^2 \rangle_s$, and μ_s in Table XI.

Table XI. The values of Q_s , $\langle r_1^2 \rangle_s$, and μ_s due to the vacuum polarized nucleon pairs calculated in the static and relativistic perturbation theories [141], [142].

	unit	static ($\sigma_{\max} = 11\mu$)	relativistic ($\sigma_{\max} = 2m$)
Q_s	e	1.9	0.44
$\langle r_1^2 \rangle_s$	$\frac{1}{\mu^2}$	0.04	0.04
μ_s	$\frac{e}{2m}$	2.7	0.60

The value of λ is taken as $\lambda = \lambda_{\text{pert}}$. The calculated $\langle r_1^2 \rangle_s$ is smaller than required and a larger λ seems to be needed. Although we have no reliable knowledge on $H_{3\pi\gamma}$, it contributes not only to the nucleon structure but also to the $\gamma - \pi$ and $\gamma - 2\pi$ processes. For instance the angular distributions of pions in the $\gamma - \pi$ process at low energies are reasonably well understood without an interaction such as $H_{3\pi\gamma}$ and the introduction of $H_{3\pi - \gamma}$ with a large λ is very unlikely. Detailed study on the angular distribution [142] indicates $\lambda \lesssim \lambda_{\text{pert}}$. The calculated value of μ_s has the opposite sign with that of the experiment and is pretty large. Since the three pion states may not dominate μ_s , this would not be very serious.

The preliminary study of the 3π state contributions by perturbation shows that the results are qualitatively good but still some higher order effects are needed to bring a large enough $\langle r_1^2 \rangle_s$. The most promising mechanism to enhance the 3π contributions may be found in the pion-pion interaction as it was the case for the 2π isovector contributions. Since the 3π state has $I = 0$, $J = 1$, and the odd parity, any pair of pions among 3π form $I = 1$ and therefore $J = 1$ state.¹⁾ This 2π state with $I = J = 1$ is one in which the strong interaction was needed to explain the isovector part of the nucleon structure and the same interaction are now being required to enhance the 3π state contributions. If 3π make a bound state with $I = 0$ and $J = 1$ [143], this corresponds to the vector meson proposed by NAMBU [139].

No quantitative approach has been made on the effect of the pion-pion interaction upon the 3π state contributions. Yet we may say that a plausible mechanism to explain the isoscalar charge distribution is in the 3π state contribution enhanced

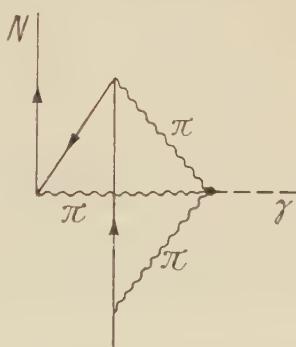


Fig. 22. An example of the Feynman graph of three-pion state contribution. Two pions are in the s-state and one is in the p-state.

¹⁾ Higher odd values of $J (= 3, 5, \dots)$ are possible, but for low momentum transfer $\sigma \lesssim 3\mu$ the lowest value $J = 1$ seems to be most important.

by the pion-pion interactions. As for μ_s , effects from higher configurations than 3π states are presumably important and little can be said from the above analysis. Probably an interesting point is that the nucleon core current gives a large and negative μ_s and the vacuum polarized nucleon current predicts a large and positive μ_s . The observed small and negative μ_s may probably be obtained by a more or less accidental cancelation of these opposite contributions as well as other contributions from the current of higher configurations.

§ 7. Concluding Remarks

In § 1 ~ § 6 we have discussed the experimental and theoretical status of the level structure and electromagnetic structure of the nucleons. Although no quantitatively reliable arguments have been done, the present pion theory seems to give us a possible basis for the qualitative understanding of the nucleon structure. Main efforts have been devoted to the study of the cause of the resonance states in

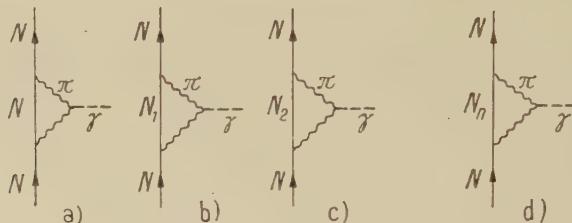


Fig. 23. Diagrams representing various different 2π current contributions.

terms of the relatively long range forces, the p-wave pion-nucleon interaction with not very large momentum transfers ($q \lesssim m$) and the pion-pion interaction, and the study of the outer part of the electromagnetic structure of the nucleon. In spite of their fair success the pion-nucleon interactions with shorter ranges seem to be essential for the very occurrence of the resonance states and the inner part of the electromagnetic structure for the understanding of the anomalous magnetic moment.

The level structure and electromagnetic structure of the nucleon have been discussed more or less independently. Generally speaking the connection between the two phenomena is expected to be rather loose and even an existence of a sharp resonance will not produce a marked behaviour on the electromagnetic structure. For instance if we visualize an excited state as a pion moving around a nucleon in a definite orbit [46], the pion wave function is extending over a fairly large spatial region and thus corresponding to a rather wide and smooth distribution of the electromagnetic structure. Furthermore the pion wave function of the actual excited states are appreciable up to higher momentum components as was stressed in § 2 and thus no closer connection with the outer electromagnetic structure than with the inner one is expected.

Let us take as an example the isovector part of the electromagnetic structure due to the pion current. In the dispersion theoretical approach the most extended pion current is represented by the 2π contribution (Figs. 14), which can be a sum of the different contributions (Figs. 23). These diagrams are not ordinary Feynman graphs and the intermediate π , N , N_1, \dots, N_n, \dots lines correspond to

the propagation of the physical π , N , N_1 , ..., N_n , ... particles. Here N_n is the n -th eigenstate of the total Hamiltonian with the baryon number +1 and may be called as the n -th excited state of the nucleon. In the static theory essentially the same diagrams are taken into account as the pion current contribution. Only difference is that N_n is treated nonrelativistically and the various vertexes ($NN\pi$, $NN_1\pi$, ..., $\pi\pi\gamma$) are evaluated by the ordinary static couplings.

The calculation in the static theory shows that the main contribution comes from Fig. 23a. The correction term due to Fig. 23b is shown to be small and the contributions from the other diagrams (Fig. 23c ...) are neglected. Similarly in the relativistic dispersion theoretical approach the contributions due to those intermediate states where the excited nucleon N_n is found are expected to be small. The reason why the sharp resonance N_1 , N_2 , or N_3 does not cause appreciable effects on the outer part of the pion current distribution may be due to its small width itself. Namely these resonances are excited when the pion-nucleon total energy is very near to one of these resonance energies and the probability for such an excitation becomes very small for other energies. Since the πNN_1 , πNN_2 , or πNN_3 vertex appearing in Fig. 23b, 23c, or 23d corresponds to the N_1 , N_2 , or N_3 excitation by a negative energy pion,¹⁾ the total nucleon-pion energy is far off from the resonance energy and no appreciable effect was found in the electromagnetic structure. Convergence of the sum of the contributions from Figs. 23a, 23b ... seems to be obtained in the static theory as well as in the relativistic dispersion theory as being expressed by the unitarity condition for the latter.

The short range isovector distributions contributed by the 4π , 6π , ... intermediate states as well as the isoscalar distributions by the 3π , 5π , ... intermediate states appear only in the relativistic theory where the vacuum polarization current is taken into account. Convergence of the sum of these contributions are expected good for evaluating $\langle r_{1,2}^2 \rangle_{v,s}$ as well as the higher moments of the charge and anomalous magnetic moment distributions, but poor for evaluating $\mu_{v,s}$ and $Q_{v,s}$. No reliable discussion on the convergence problem has been done.

Little discussion has been made on the nucleon core current and no discussion on the strange particle current. The small observed μ_s requires more quantitative understanding of these inner current contributions to the electromagnetic structure and the condition for the occurrence of the excited states examined in §2 requires more knowledge also on the inner structure of the nucleon.

References

- [1] J. C. BRISSON, J. DETOEF, P. FALK-VARIANT, L. VAN ROSSUM, G. VALLADAS, and L. C. YUAN, Phys. Rev. Lett. **3**, 561 (1959).
- [2] J. C. BRISSON, J. F. DETOEF, P. FALK-VARIANT, L. Va. Rossum, and G. VALLADAS, Nuovo Cimento (in press).
- [3] T. J. DELVIN, B. C. BARISH, W. N. HESS, V. PEREZ-MENDEZ, and J. SOLOMON, Phys. Rev. Lett. **4**, 242 (1960).
- [4] M. J. LONGO, J. A. HELLAND, W. N. HESS, B. J. MOYER, and V. PEREZ-MENDEZ, Phys. Rev. Lett. **3**, 568 (1959).

¹⁾ In the static theory Fig. 23b is composed of the three diagrams corresponding to the three diagrams of Figs. 14, if we express explicitly the time ordering of the diagrams. Among the two πNN_1 vertexes in each diagram at least one vertex corresponds to the N_1 excitation by a negative energy pion.

- [5] L. K. GOODWIN, R. W. KENNEY, and V. PEREZ-MENDEZ, Phys. Rev. Lett. **3**, 522 (1959).
- [6] N. C. BURROWES, D. O. CALDWELL, D. H. FRISCH, D. A. HILL, D. M. RITSON, R. A. SCHLUTER and M. A. WAHLIG, Phys. Rev. Lett. **2**, 119 (1959).
- [7] R. COOL, O. PICCIONI and D. CLARK, Phys. Rev. **103**, 1082 (1956).
- [8] MOYER, reported by V. I. VEKSLER at The 9th Conference on High Energy Nuclear Physics at Kiev (1959).
- [9] V. G. CHANG et al, reported by V. I. VEKSLER at Kiev (1959).
- [10] R. R. CRITTENDEN, J. H. SCANDRETT, W. D. SHEPHARD, W. D. WALKER and J. BALLAM, Phys. Rev. Lett. **2**, 121 (1959).
- [11] J. GAILLARD, P. LEHMANN, A. LEVEQUE, J. MEYER, D. REVEL and J. SACTON, C. R. Acad. Sci. **249**, 1497 (1959).
- [12] L. BAGGETT, Jr. UCRL 8302.
- [13] W. D. WALKER, F. HUSHFAR and W. D. SHEPHARD, Phys. Rev. **104**, 526 (1956).
- [14] S. BERGIA, L. BERTOCCHI, V. BORELLI, G. BROUTTI, L. CHEROVANI, L. LAVATELLI, A. MINGUZZI-RANZI, R. TOSI, P. WALOSHEK and V. ZOBOLI, Nuovo Cimento **15**, 551 (1960).
- [15] A. R. ERWIN, and J. K. KOPP, Phys. Rev. **109**, 1364 (1958).
- [16] V. ALLES-BORELLI, S. BERGIA, E. PEREZ-FERREIRA and P. WALOSCHEK, Nuovo Cimento **14**, 211 (1959).
- [17] V. I. DERADO, G. LUTJENS and N. SCHMITZ, Annals of Physics **4**, 103 (1959).
- [18] M. CHRETIEN, J. LEITNER, N. P. SAMIOS, M. SCHWARTZ and J. STEINBERGER, Phys. Rev. **108**, 383 (1957).
- [19] L. M. EISBERG, W. B. FOWLER, R. M. LEE, W. D. SHEPHARD, R. P. SHUTT, A. M. THORNDIKE and W. L. WHITTEMORE, Phys. Rev. **97**, 797 (1959).
- [20] W. D. WALKER and J. CRUSSARD, Phys. Rev. **98**, 1416 (1955).
- [21] R. C. WHITTEN and M. M. BLOCK, Phys. Rev. **111**, 1676 (1958).
- [22] W. D. WALKER, Phys. Rev. **108**, 672 (1957).
- [23] G. MAENCHEN, W. B. FOWLER, W. M. POWELL and R. W. WRIGHT, Phys. Rev. **108**, 850 (1957).
- [24] I. DERADS and N. SCHMITZ, Phys. Rev. **118**, 309 (1960).
- [25] W. A. PERKINS, J. C. CARIS, R. W. KENNEY, E. A. KNAPP and V. PEREZ-MENDEZ, Phys. Rev. Lett. **3**, 56 (1959).
- [26] L. O. REELLING and D. A. GLASER, Phys. Rev. **116**, 1001 (1959).
- [27] W. J. WILLIS, Phys. Rev. **116**, 753 (1959).
- [28] M. E. BLEVINS, M. M. BLOCK and J. LEITNER, Phys. Rev. **112**, 1287 (1958).
- [29] W. D. WALKER, J. DAVIS and W. D. SHEPHARD, Phys. Rev. **118**, 1612 (1960).
- [30] F. D. DIXON and R. L. WALKER, Phys. Rev. Lett. **1**, 142, 458 (1958).
- [31] M. HEINBERG, W. M. McCLELLAND, F. TRUKOT, W. M. WOODWARD, R. R. WILSON and D. M. ZIPPOY, Phys. Rev. **110**, 1211 (1958).
- [32] H. H. BINGHAM and A. B. CLEGG, Phys. Rev. **112**, 2053 (1958).
- [33] P. C. STEIN and K. C. ROGERS, Phys. Rev. **110**, 1209 (1958).
- [34] R. M. WORLOCK, Phys. Rev. **117**, 537 (1960).
- [35] K. BERKELMAN and J. A. WAGGONER, Phys. Rev. **117**, 1364 (1960).
- [36] J. W. DEWIRE, H. E. JACKSON and R. LITTAUER, Phys. Rev. **110**, 1208 (1958).
- [37] J. I. VETTE, Phys. Rev. **111**, 622 (1958).
- [38] P. C. STEIN, Phys. Rev. Lett. **2**, 473 (1959).
- [39] J. M. SELLEN, G. COCCONI, V. T. COCCONI and E. L. HART, Phys. **110**, 779 (1958); **113**, 1323 (1959).
- [40] M. BLOCH and M. SANDS, Phys. Rev. **108**, 1101 (1958).
- [41] M. GELL-MANN and K. M. WATSON, Annual Review of Nuclear Science **4**, 219 (1954).
- [42] K. A. BRUECHNER, Phys. Rev. **86**, 206 (1952).
- [43] H. A. BETHE and F. DE HOFFMANN, Mesons and Fields, Vol. II Row, Peterson and Company, page 131 (1955).
- [44] ANDERSON and METROPOLIS, Proceeding of The 6th Rochester Conference (1956).
- [45] B. T. FELD, Annals of Physics **1**, 58 (1957).
- [46] B. T. FELD, Annals of Physics, **4**, 189 (1958).

- [47] B. COSTA and B. T. FELD, Annals of Physics, **9**, 354 (1960).
- [48] R. G. SACHS, Phys. Rev. **95**, 1065 (1954).
- [49] J. ENOCK, R. G. SACHS and K. C. WALL, Phys. Rev. **108**, 433 (1957).
- [50] R. R. WILSON, Phys. Rev. **110**, 1212 (1958).
- [51] R. F. PEIERLS, Phys. Rev. Lett. **1**, 174 (1958).
- [52] R. F. PEIERLS, Phys. Rev. **118**, 325 (1960).
- [53] J. J. SAKURAI, Phys. Rev. Lett. **1**, 258 (1958).
- [54] L. F. LANDOVITZ and L. MARSHALL, Phys. Rev. Lett. **3**, 190 (1959).
- [55] M. J. MORAVESIK, Phys. Rev. Lett. **2**, 171 (1959).
- [56] Report of BERNARDINI, The 9th Conf. on High Energy Physics, Kiev (1959).
- [57] P. CARRUTHERS, Phys. Rev. Lett. **4**, 303 (1960).
- [58] P. CARRUTHERS and H. A. BETHE, Phys. Rev. Lett. **4**, 536 (1960).
- [59] E. P. WIGNER, Phys. Rev. **98**, 145 (1955).
- [60] M. IDA, Progr. Theor. Phys. (Japan) **20**, 979 (1958).
- [61] K. ITABASHI, M. KATO, K. NAKAGAWA and G. TAKEDA, Progr. Theor. Phys. (Japan) **24**, 529 (1960).
- [62] K. ITABASHI, M. KATO, K. NAKAGAWA and G. TAKEDA, to be published (1961).
- [63] W. WONG and M. ROSS, Phys. Rev. Lett. **3**, 398 (1959).
- [64] Report of J. STEINBERGER, Proc. of the 8th Conf. on High Energy Physics, CERN (1958), page 148.
- [65] B. T. FELD, Proc. of the 8th Conf. on High Energy Physics, CERN (1958), page 148.
- [66] See, e. g., T. TEICHMANN and E. P. WIGNER, Phys. Rev. **87**, 123 (1952).
- [67] Lecture note by G. WENTZEL, Univ. of Rochester (1954)
A. PAIS and R. SERBER, Phys. Rev. **113**, 955 (1959).
- [68] S. TOMONAGA, Z. MAKI and M. SATO, Progr. Theor. Phys. (Japan) **9**, 607 (1953).
G. TAKEDA, Phys. Rev. **95**, 1078 (1954).
- D. ITO, Y. MIYAMOTO and Y. WATANABE, Progr. Theor. Phys. (Japan) **13**, 594 (1955).
- FRIEDMAN, T. D. LEE and C. CHRISTIAN, Phys. Rev. **100**, 1494 (1955).
- F. HARLOW and B. JACOBSON, Phys. Rev. **93**, 333 (1954).
- [69] R. STROFFOLINI, Phys. Rev. **104**, 1146 (1956).
- [70] G. TAKEDA, Journal of Phys. Soc. Japan (in Japanese), **15**, 298 (1960).
- [71] J. S. TOLL, Phys. Rev. **104**, 1760 (1956).
- [72] M. L. GOLDBERGER, H. MIYAZAWA and R. OEHME, Phys. Rev. **96**, 986 (1955).
- [73] G. F. CHEW, M. L. GOLDBERGER, F. E. LOW and Y. NAMBU, Phys. Rev. **106**, 1337 (1957).
- [74] F. E. LOW, Phys. Rev. **97**, 1392 (1955), G. F. CHEW and F. E. LOW, Phys. Rev. **101**, 1570, **101**, 1579 (1956), G. SALZMAN and F. SALZMEN, Phys. Rev. **108**, 1619 (1957).
- [75] G. F. CHEW, Encyclopedia of Physics.
- [76] G. C. WICK, Rev. Mod. Phys. **27**, 339 (1955).
- [77] B. Bosco, S. Funibi and A. Stranghellini, Nuclear Phys. **10**, 663 (1959).
- [78] F. J. DYSON, M. ROSS, E. E. SALPETER, S. S. SCHWEBER, M. K. SUDARESAN, W. M. VISCHER and H. A. BETHE, Phys. Rev. **95**, 1644 (1954).
- [79] M. H. KALOS and R. H. DALITZ, Phys. Rev. **100**, 1515 (1955).
- [80] F. J. DYSON, Phys. Rev. **99**, 1037 (1955).
- [81] G. TAKEDA, Phys. Rev. **100**, 440 (1955).
- [82] K. A. BRUECKNER, Proceedings of the 6th Annual Rochester Conference on High Energy Physics (1956), page IV—12.
- [83] B. T. FELD, Proc. of the 6th Annual Rochester Conference on High Energy Physics, IV, page 11 (1956).
- [84] G. TAKEDA, unpublished (1957).
- [85] M. IKEDA, S. OGAWA and Y. OHNURI, Progr. Theor. Phys. Japan **22**, 715 (1959); **23**, 1073 (1960).
S. SAWADA and M. YONEZAWA, Progr. Theor. Phys. Japan **22**, 610 (1959), **23**, 662 (1960).
- [86] A. I. BAZ, Phil. Mag. **4**, 1035 (1959).
- [87] R. H. MILLURN, Rev. Mod. Phys. **27**, 121 (1955). Also see V. S. BARASHENKOV, Dubna 1959, and G. E. A. FIALHO, Phys. Rev. **105**, 328 (1957).

- [88] LEPORE, NEUMAN and STUART, Phys. Rev. **94**, 788 (1954).
- [89] R. M. STERNHEIMER, Phys. Rev. **101**, 170 (1956).
- [90] D. ITO and S. MINAMI, Progr. Theor. Phys. (Japan) **14**, 198 (1955).
- [91] D. ITO, T. KOBAYASHI, M. YAMASAKI and S. MINAMI, Progr. Theor. Phys. (Japan) **18**, 264 (1957).
- [92] S. Z. BELENKY, JETP **30**, 983 (1956), **33**, 1248 (1957).
- [93] L. OKUN' and I. POMERANCHUK, JETP **30**, 424 (1956).
- [94] D. I. BLOKHINSEV, V. S. BARASHENKOV and V. G. GRISHIN, Dubna (1958).
- [95] S. FERNBACH, R. SERBER and T. B. TAYLOR, Phys. Rev. **75**, 1352 (1949).
- [96] Z. KOBA, A. KRZYWICKI, R. RACZKA and Z. CHYLINSKI, Nuclear Physics **19**, 199 (1960).
- [97] D. I. BLOKHINSEV, CERN Symposium, **2**, 155 (1956).
- [98] G. TAKEDA, Talk at the annual meeting of Japan Physical Society, Kyoto (1958). Also see BARASHENKOV, ref. [87].
- [99] H. MIYAZAWA, Soryushiron Kenkyu, **17**, 206 (1958) mimeographed circular in Japanese.
- [100] I. IA. POMERANCHUK, JETP **34**, 725 (1958).
- [101] D. AMATI, M. FIERZ and V. GLASER, Phys. Rev. Lett. **4**, 89 (1960).
- [102] R. HOFSTADTER, F. BUMILLER and M. R. YEARIAN, Rev. Mod. Phys. **30**, 482 (1958).
R. HOFSTADTER, Ann. Rev. Nuclear Sci. **7**, 231 (1957).
R. HOFSTADTER, Rev. Mod. Phys. **28**, 214 (1956).
- [103] A report by R. HOFSTADTER, Proc. of 9th Conference on High Energy Nuclear Physics, Kiev. (1959).
- [104] D. R. YENNIE, M. M. LEVY and D. G. RAVENHALL, Rev. Mod. Phys. **29**, 144 (1957).
- [105] L. L. FOLDY, Phys. Rev. **83**, 688 (1951); **87**, 688; 693 (1951).
- [106] G. SALTMAN, Phys. Rev. **99**, 973 (1955).
- [107] F. J. ERNST, R. G. SACHS, and K. C. WALI, Phys. Rev. **119**, 1105 (1960).
- [108] M. ROSENBLUTH, Phys. Rev. **79**, 615 (1950).
- [109] E. FERMI and L. MARSHALL, Phys. Rev. **72**, 1139 (1947).
- [110] L. L. FOLDY, Rev. Mod. Phys. **30**, 471 (1958).
- [111] HAMERMESH, RINGO and WATTENBERG, Phys. Rev. **85**, 483 (1952).
- [112] J. A. MCINTYRE and S. DHAR, Phys. Rev. **106**, 1074 (1957).
- [113] L. I. SCHIFF, Rev. Mod. Phys. **30**, 462 (1958).
- [114] W. K. H. PANOFSKY, 1958 Annual International Conference on High Energy Physics at CERN.
- [115] S. D. DRELL, 1958 Annual International Conference on High Energy Physics at CERN.
- [116] K. HIIDA, N. NAKANISHI, Y. NOGAMI and M. UEHARA, Progr. Theor. Phys. (Japan) **22**, 247, 351 (1959).
- [117] H. J. BREMERMAN, R. OEHME and J. G. TAYLOR, Phys. Rev. **109**, 2178 (1958).
- [118] Y. NAMBU, Nuovo Cimento **6**, 1064 (1957).
- [119] G. F. CHEW, R. KARPLUS, S. GASIOROWICZ and F. ZACHARIASEN, Phys. Rev. **110**, 265 (1958).
- [120] P. FEDERBUSH, M. L. GOLGBERGER and S. B. TREIMAN, Phys. Rev. **112**, 642 (1958).
- [121] X. MIYAZAWA, Phys. Rev. **101**, 1564 (1956); **104**, 1741 (1956).
- [122] R. SACHS and S. TREIMAN, Phys. Rev. **103**, 435 (1956).
- [123] G. SALTMAN, Phys. Rev. **105**, 1076 (1957).
- [124] S. FUBINI, Nuovo Cimento **3**, 1425 (1953).
- [125] B. FRIED, Phys. Rev. **88**, 1142 (1952).
- [126] G. F. CHEW, University of California Radiation Laboratory Report UCRL-8194 (1958) (unpublished).
- [127] K. HIIDA and N. NAKANISHI, Progr. Theor. Phys. (Japan) **22**, 863 (1959); **24**, 414 (1960).
- [128] S. GOTO, Progr. Theor. Phys. (Japan) **12**, 699 (1954).
- [129] S. OKUBO, Nuovo Cimento **6**, 542 (1957).
- [130] K. TANAKA, Phys. Rev. **109**, 578 (1958).
- [131] W. R. FRAZER and J. R. FULCO, Phys. Rev. Letters **2**, 365 (1959).
W. R. FRAZER and J. R. FULCO, Phys. Rev. **117**, 1609 (1960).
- [132] R. SACHS, Phys. Rev. **87**, 1100 (1952).

- [133] W. G. HOLLADAY, Phys. Rev. **101**, 1198, 1202 (1956).
- [134] G. SANDRI, Phys. Rev. **101**, 1616 (1956).
- [135] Y. NOGAMI, Nuovo Cimento **4**, 985 (1957).
- [136] H. MIYAZAWA, Phys. Rev. **97**, 1413 (1955).
- [137] C. Iso, Soryushiron-kenkyu (mimeographed circular in Japanese) **13**, 1021 (1954).
- [138] A report by G. CHEW, Proc. of 7th Rochester Conference, 1957.
- [139] Y. NAMBU, Phys. Rev. **106**, 1366 (1957).
- R. W. HUFF, Phys. Rev. **112**, 1021 (1958).
- [140] J. SCHWINGER, Phys. Rev. **76**, 790 (1949).
- [141] B. BOSCO and V. DE ALFARO, Phys. Rev. **115**, 215 (1959).
- [142] M. KATO (to be published).
- [143] G. F. CHEW, Phys. Rev. Letters **4**, 142 (1960).

Quantenlogik

P. MITTELSTAEDT

Max-Planck-Institut für Physik und Astrophysik, München

I. Einleitung

Das vorliegende Referat behandelt die Begründung und Formalisierung der Quantenlogik. Unter Quantenlogik versteht man einen von der üblichen klassischen Logik abweichenden Logikkalkül, der diejenige „Logik“ darstellt, die für Aussagen über Messungen an quantenphysikalischen System gültig ist.

Unter Verwendung der durch v. NEUMANN [1] angegebenen Formulierung der Quantentheorie war bereits 1936 von BIRKHOFF und v. NEUMANN [2] die Theorie der abgeschlossenen Linearmanigfaltigkeiten des HILBERT-Raums von einem verbandstheoretischen Gesichtspunkt her genauer untersucht worden. Auf Grund der formalen Ähnlichkeiten dieses Verbandes mit dem Verband der klassischen Logik und im Hinblick auf die Interpretation, die abgeschlossene Linearmanigfaltigkeiten bzw. Projektionsoperatoren im Rahmen der Quantentheorie erfahren, vermuteten die Verfasser, daß sich der Kalkül der abgeschlossenen Linearmanigfaltigkeiten als eine Logik quantenphysikalischer Aussagen interpretieren lasse.

Die Frage, inwiefern die Theorie von BIRKHOFF und v. NEUMANN als eine abgeänderte Logik im inhaltlichen Sinne des Wortes verstanden werden könne, konnte jedoch solange nicht sinnvoll untersucht werden, als man im Rahmen der von HILBERT u. a. [3, 4] ausgearbeiteten axiomatischen Methode unter Logik ein formales System von nicht näher begründeten Axiomen verstand.

Jedoch wurde diese Interpretationsfrage angreifbar im Rahmen der neueren Entwicklung der Logik. Die im Anschluß an SKOLEM [5] insbesondere von LORENZEN [6, 7] ausgearbeitete operative Auffassung der Logik begreift die Gesetze der Logik als Regeln, deren Evidenz sich aus einer Reflexion über die Möglichkeiten des schematischen Operierens in Kalkülen ergibt.¹⁾ Aber auch unabhängig vom Kalkülbegriff ließ sich die Logik für eine sehr große Klasse von Aussagen als Evidenz nachweisen (Kap. II).

Im Rahmen dieses Begriffs von Logik konnte dann die Frage untersucht werden, ob für quantentheoretisch-physikalische Aussagen die Evidenz logischer Gesetze im Sinne der operativen Logik gezeigt werden kann [8, 9]. Dabei stellte sich heraus, daß dies nur für die sogenannten kommensurablen Aussagen möglich ist, während für allgemeine Aussagen über Meßergebnisse an quantenphysikalischen

¹⁾ Eine kurze Darstellung der wesentlichen Gesichtspunkte der operativen Logik ist im Anhang angegeben.

Systemen nur einige dieser Gesetze noch als gültig und evident nachgewiesen werden konnten (Kap. II).

Ein Vergleich dieser eingeschränkten Logik mit der von BIRKHOFF und v. NEUMANN angegebenen Theorie abgeschlossene Linearmannigfaltigkeiten zeigte weiter, daß diese Theorien völlig übereinstimmen, sowohl was die Definition der logischen Partikeln „und“, „oder“ und „nicht“ anbetrifft, wie auch im Hinblick auf die zwischen diesen Partikeln gültigen Gesetze. Durch eine genaue Analyse der verschiedenen logischen bzw. quantenlogischen Gesetze von einem verbandstheoretischen Gesichtspunkt konnten zahlreiche wichtige strukturelle Unterschiede zwischen der klassischen Logik und der Quantenlogik besonders deutlich gemacht werden (Kap. III).

Obwohl man auf diese Weise eine exakt formulierbare Logik quantenphysikalischer Aussagen erhält, ist es doch für zahlreiche Fragestellungen zweckmäßig, an Stelle dieser Objektlogik zu einer metalogischen Formulierung überzugehen, die sowohl mehr dem physikalischen Sprachgebrauch entspricht [10], als auch vom inhaltlichen Gesichtspunkt aus leichter zu überschauen ist. Es soll in Kap. IV dargestellt werden, wie sich eine solche Metasprache in enger Anlehnung an die sogenannten Modalkalküle sehr durchsichtig formulieren läßt. Dabei wird dann auch eine spezielle Art von Mehrwertigkeit der untersuchten Logik in Erscheinung treten, was bei der objektsprachlichen Formulierung nicht der Fall ist.

Das vorliegende Referat beschränkt sich auf die Frage der Begründung der Quantenlogik im Sinne einer operativen Logik und auf die genaue Formalisierung der für die Quantenlogik bzw. den quantenlogischen Modalkalkül wichtigen Kalküle. Diejenigen noch im Fluß befindlichen Untersuchungen, die, von diesen Ergebnissen ausgehend, durch die Einführung mehrerer Sprachschichten Verallgemeinerungen der hier untersuchten Theorien betreffen [11] und einen direkten Zusammenhang dieser Sprachschichten mit dem Problem der mehrfachen Quantisierung vermuten, sollen in diesem Referat nicht besprochen werden.

II. Begründung der Quantenlogik

II. 1. Das Problem der Begründung von Logik und Quantenlogik

Das Problem, das in diesem Referat besprochen werden soll, betrifft die Frage, inwieweit physikalische Aussagen den Gesetzen der Logik gehorchen. Dabei liegen die Schwierigkeiten, diese Frage zu beantworten, nicht so sehr darin, eine sachlich zutreffende Antwort zu finden, als in dem Problem, die Frage so zu präzisieren, daß zirkelfeste Formulierungen vermieden werden können. Es soll daher in diesem Kapitel zunächst der genaue Sinn der gestellten Frage diskutiert werden.

Unter einer physikalischen Aussage wollen wir hier eine Aussage über die räumlich-materielle Wirklichkeit verstehen, wie sie sich uns zeigt, wenn wir uns messend und beobachtend mit ihr befassen. Dabei soll jedoch die Einschränkung gemacht werden, daß wir nur solche Phänomene diskutieren wollen, die von der Quantentheorie und der dazugehörigen Theorie des Meßprozesses vollständig beschrieben werden können. Damit sind sicher nicht alle Phänomene der räumlich-materiellen Wirklichkeit erfaßt, es fehlen insbesondere alle die Vorgänge, die sich bei sehr hohen Geschwindigkeiten oder bei sehr hohen Energien abspielen.

Die Frage, ob diese so definierten physikalischen Aussagen den Gesetzen der Logik gehorchen, muß jedoch noch genauer präzisiert werden. In der naiven

bisher gebrauchten Formulierung ist sie noch einigen teils formalen teils mehr philosophischen Einwänden ausgesetzt. Ohne hier auf die in der Geschichte der Philosophie von verschiedenen Gesichtspunkten aus diskutierten Frage nach dem Wesen der Logik selbst im einzelnen einzugehen, sollen jedoch die erwähnten Einwände gegen die hier zu untersuchende Problemstellung insoweit besprochen werden, als dies für eine genaue Formulierung der erörterten Fragestellung erforderlich ist.

Ein wesentlich formaler Einwand beruht auf der Feststellung, daß die hier untersuchte Wirklichkeit durch die Quantentheorie beschreibbar sein soll. Aussagen über diesen Teil der Wirklichkeit können also durch quantentheoretische Aussagen ersetzt werden. Bei einem solchen Vorgehen besteht jedoch die Gefahr, daß bei der Formulierung der Quantentheorie Logik bereits im Ansatz verwendet würde, so daß die Frage, ob die einzelnen Aussagen der Theorie den logischen Gesetzen gehorchen, in sich zirkelhaft wäre.

Um dies zu vermeiden, bedienen wir uns der auf LEIBNIZ zurückgehenden Idee der Kalkülisierung einer Theorie [7]. Damit ist gemeint, daß wir die Theorie in der Form eines sogenannten Kalküls umschreiben. Unter einem Kalkül verstehen wir dabei ein System von Regeln, das es gestattet, durch rein schematisches Operieren nach diesen Regeln gewisse Figuren zu konstruieren. Kalküle setzen keine Wissenschaft der Logik voraus, sondern nur die Fähigkeit, nach Regeln schematisch zu operieren.

Wir werden dann fragen, inwieweit sich physikalische Aussagen als konstruierbare Figuren eines Kalküls auffassen lassen. Dies wird für eine große Klasse von Aussagen der Fall sein, jedoch nicht für die spezifisch quantentheoretischen Meßergebnisse. Es wird aber auch hier gelingen, die Theorie in gewisser Hinsicht als einen Kalkül aufzufassen, in dem jedoch die Möglichkeiten des schematischen Operierens gegenüber einem wirklichen Kalkül etwas eingeschränkt sind. Ein solches System von Regeln, welches ebenso wie ein Kalkül keine Logik, sondern nur die Fähigkeit des schematischen Operierens voraussetzt, wollen wir als einen Quasikalkül bezeichnen.

Nach diesen Vorbereitungen können wir dann die Frage untersuchen, ob die Logik in der Natur, die wir durch Kalküle bzw. Quasikalküle beschrieben haben, gilt. Dabei wird sich herausstellen, daß dies für die Aussagen der sogenannten klassischen Physik immer der Fall ist, daß aber die Aussagen, die sich auf die Meßergebnisse an quantenmechanischen Systemen beziehen, nur einer stark eingeschränkten Logik gehorchen, die wir als Quantenlogik bezeichnen wollen [2, 10]. Eine zu diesen Überlegungen analoge Behandlung des Problems der Gültigkeit der Logik, welche den Kalkülbegriff vermeidet und nur sehr allgemeine Eigenschaften quantenphysikalischer Aussagen verwendet, soll in Kap. II.5 dargestellt werden. Diese Eigenschaften werden wiederum protologischer Natur sein und keine Theorie der Logik voraussetzen.

Es wird sich dabei zeigen, daß den klassisch-physikalischen Aussagen stets die Eigenschaft der „unbeschränkten Verfügbarkeit“ zukommt, während die spezifisch-quantenphysikalischen Aussagen nur die schwächere Eigenschaft der „beschränkten Verfügbarkeit“ besitzen. Ähnlich wie in Kap. II.4 wird sich dann ergeben, daß für unbeschränkt verfügbare Aussagen die klassische Logik gilt, während für die nur beschränkt verfügbaren Aussagen, also die Aussagen über Messungen an quantenphysikalischen Systemen, nur die Quantenlogik gilt.

Ein mehr philosophischer Einwand basiert auf der Feststellung, daß unter Logik die allem Denken immanenten Gesetze zu verstehen seien, deren Gültigkeit sich

durch die diesen Gesetzen eigene Evidenz erweise und nicht an jedem speziellen Gegenstandsbereich besonders nachgeprüft zu werden braucht, weshalb die Frage nach der Gültigkeit dieser Logik in der Natur keinen genauen Sinn habe. Die im folgenden durchgeföhrten Untersuchungen werden jedoch zeigen, daß die Frage der Gültigkeit der Logik in dieser Form gar nicht zur Diskussion steht. Wir werden vielmehr ausdrücklich von der Tatsache Gebrauch machen und dies auch im einzelnen ausführen, daß logische Gesetze zwischen Aussagen über Wirkliches in einem noch näher zu präzisierenden Sinne evident sind, wenn nur dieser Wirklichkeit gewisse sehr allgemeine Züge zugeschrieben werden können. Diese allgemeinen Züge sollen in Kap. II.2 und 3, und da es sich speziell um die Untersuchung einer mathematischen Theorie, nämlich der Quantentheorie, handelt, durch die Kalkülsierbarkeit der Aussagen ersetzt werden. Die Evidenz der Logik ist jedoch nicht an diese spezielle Formulierung gebunden, sondern kann in einem wesentlich allgemeineren Rahmen gezeigt werden, wie in Kap. II.5 dargestellt werden soll. Aber gerade diese allgemeinen Züge, die wohl in der philosophischen Tradition stets Wirklichem überhaupt zugeschrieben wurden, liegen im Bereich der quantentheoretisch-physikalischen Wirklichkeit nicht allgemein vor, so daß also nicht die Gültigkeit und Evidenz der Logik in Frage steht, sondern die Existenz eben jener Wirklichkeit, an der sich die Evidenz der Logik überhaupt erst erweisen könnte.

Es scheint daher, als werde durch diese Umstände eine Situation geschaffen, in der zwar nicht Logik selbst, wohl aber die ihr zugrunde liegende Wirklichkeit als empirisch gegeben betrachtet werden muß. Wir werden jedoch sehen, daß dies nur teilweise der Fall ist. Die einfach empirisch gegebenen Meßergebnisse gehorchen aus eben demselben Grunde wie die Aussagen der klassischen Physik der klassischen Logik. Die spezifisch quantentheoretisch-physikalische Wirklichkeit entsteht erst, wenn man diese Meßergebnisse innerhalb des allgemeinen Erkenntnistheoretischen Konzepts, daß der Physik zugrunde liegt, interpretiert. Für den hier untersuchten Fall heißt das, daß die Aussagen der quantentheoretisch-physikalischen Wirklichkeit nicht einfach Meßergebnisse sind, sondern die im Rahmen der statistischen Deutung der Quantentheorie interpretierten experimentellen Resultate. Für diese Aussagen aber gilt nicht mehr die klassische Logik, sondern die Quantenlogik.

II. 2. Der physikalische Aussagenbegriff

Um zunächst den Begriff der physikalischen Aussage genau festzulegen, wollen wir hier diejenige Formulierung der Quantenmechanik verwenden, die sich des Begriffs der „Eigenschaft“ eines physikalischen Systems S bedient [1]. Eigenschaften sind zum Beispiel, daß gewisse Observable von S bestimmte Meßwerte besitzen, oder daß die Meßwerte in einem vorgegebenen Wertebereich liegen usw. Um alle diese Eigenschaften in einer einheitlichen Weise zu schreiben, führen wir die folgende Definition ein: Liegt der quantenmechanische Zustand φ eines vorgegebenen Systems S in einer abgeschlossenen Linearmannigfaltigkeit M_A des HILBERT-Raumes (die natürlich auch aus einem einzigen Zustand φ bestehen kann), so wollen wir sagen, daß das System S die Eigenschaft E_A hat. Das ist genau dann der Fall, wenn $P_A \varphi = \varphi$ gilt, wobei P_A der auf M_A projizierende Projektionsoperator ist. Da P_A ein linearer, selbstdäjungirter Operator mit den Eigenwerten 1 und 0 ist, kann man P_A als den Operator einer

Observablen auffassen, die die Meßwerte 1 und 0 hat. Das Vorliegen des Eigenwertes 1 besagt dann, daß das im Zustande $|\varphi\rangle$ befindliche System S die Eigenschaft E_A hat. Bei Vorliegen des Eigenwertes 0 liegt $|\varphi\rangle$ in $M_A' = H - M_A$, so daß S die Eigenschaft E_A' besitzt.

Unter einer physikalischen Aussage A wollen wir weiter die Behauptung verstehen, daß der quantenmechanische Zustand $|\varphi\rangle$ des untersuchten physikalischen Systems in einem Unterraum M_A liegt, was nach der oben eingeführten Redeweise auch heißt, daß das System S die Eigenschaft E_A hat. Ist P_A der Projektionsoperator, der auf M_A projiziert, so werde also A durch

$$A \Leftrightarrow P_A |\varphi\rangle = |\varphi\rangle$$

definiert. (Das Symbol \Leftrightarrow verwenden wir stets für Definitionen.) Dieser Aussagebegriff ist insofern allgemein genug, als sich alle durch ein Experiment gewonnenen Ergebnisse in die Form einer solchen Aussage bringen lassen.

Die Quantentheorie zeigt nun, daß man zwei Sorten von Eigenschaften streng unterscheiden muß. Einerseits nämlich gibt es Eigenschaften E_1, E_2, \dots, E_N , die man in einem System in beliebiger Reihenfolge messen kann, ohne daß das Ergebnis der Messung dadurch irgendwie beeinflußt wird, und die man daher als konservativ bezeichnet. Dies ist dann genau der Fall, wenn die den Eigenschaften E_1, E_2, \dots, E_N entsprechenden Projektionsoperatoren alle paarweise miteinander vertauschbar sind. Dies ist jedoch ein selten realisierter Spezialfall. Im allgemeinen wird das im Zustand $|\varphi\rangle$ befindliche System irgendwelche Eigenschaften E_A, E_B, E_C gar nicht in einem objektiven Sinne besitzen [1, 10, 13].

Trotzdem sind diese Eigenschaften in einem gewissen Sinne meßbar: Durch den Meßprozeß wird nämlich der Zustand $|\varphi\rangle$ in einer solchen Weise verändert, daß in dem neuen Zustand $|\varphi'\rangle_{E_A}$ gemessen werden kann, ohne daß dadurch das System beeinflußt wird. Da verschiedene Eigenschaften E_A, E_B im allgemeinen nur in verschiedenen Zuständen $|\varphi_A\rangle, |\varphi_B\rangle$ meßbar sind, wird die Messung einer Eigenschaft E_B das Ergebnis der vorausgegangenen E_A -Messung möglicherweise wieder zerstören, weshalb es nicht möglich ist, die Eigenschaften E_A und E_B „gleichzeitig“ auf das System zu beziehen. Man bezeichnet sie daher als inkonservativ. Die gegenseitige Beeinflussung verschiedener Messungen kann man auch nicht nachträglich berücksichtigen, weil die Theorie über die Veränderung des Zustandes bei einer Messung keine genauen Aussagen machen kann. Sie liefert lediglich Wahrscheinlichkeitsaussagen, die sich auf den Ausgang sehr vieler gleichartiger Experimente beziehen.

II. 3 Die Logik der konservativen Eigenschaften

In dem vorliegenden Abschnitt soll die Logik derjenigen Aussagen A, B, C untersucht werden, die besagen, daß ein im Zustand $|\varphi\rangle$ befindliches System S bestimmte Eigenschaften E_A, E_B, E_C besitzt, wobei angenommen werden soll, daß das Vorliegen dieser Eigenschaften gleichzeitig an dem betreffenden System durch eine Messung nachgewiesen werden kann.

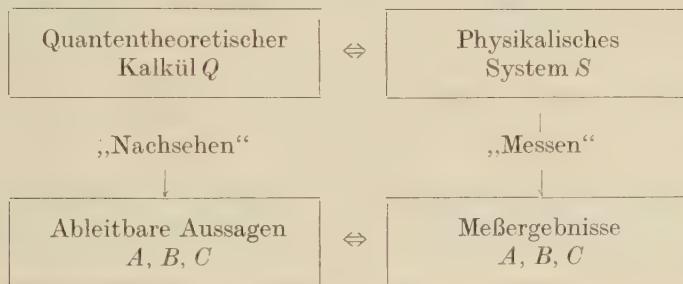
Die Logik dieser A, B, C soll im folgenden kurz als die Logik der konservativen Eigenschaften bezeichnet werden. Ebenso werden wir der Einfachheit halber meist von den „Eigenschaften“ A, B, C sprechen, soweit es keine Verwechslungsmöglichkeiten mit den oben definierten E_A geben wird. Die hier vorgenommene

Beschränkung auf kommensurable Eigenschaften bedeutet, daß die Messung dieser Größen den Zustand $|\varphi\rangle$ des Systems nicht verändert, so daß mehrere solche Eigenschaften simultan an A gemessen werden können. Mathematisch heißt das, daß die entsprechenden Projektionsoperatoren unter sich und mit P eindeutig vertauschbar sind.

Daraus folgt zunächst, daß das Vorliegen einer Eigenschaft E_A an einem System genau dann experimentell verifiziert werden kann, wenn $P_A |\varphi\rangle = |\varphi\rangle$ gilt. Die von der Quantentheorie ableitbaren Aussagen $P_A |\varphi\rangle = |\varphi\rangle$ geben daher eine vollständige Information über den Ausgang von Experimenten, die zur Feststellung kommensurabler Eigenschaften dienen.

Es besteht daher eine eindeutige Zuordnung zwischen experimentellen Aussagen und dem im Kalkül Q der Quantentheorie ableitbaren Aussagen. Diesen Kalkül denken wir uns aufgebaut aus einigen experimentell gewonnenen Aussagen über den Zustand $|\varphi\rangle$ des untersuchten Systems, die als Anfangsaussagen auftreten und sämtlichen im HILBERT-Raum gültigen Beziehungen $A \rightarrow B$, die Regeln des Kalküls darstellen. Dem „Messen“ einer Eigenschaft E_A an S entspricht daher eindeutig das „Nachsehen“ in dem Kalkül Q , ob A unter den ableitbaren Aussagen ist. Diese Zusammenhänge können durch das folgende Schema verdeutlicht werden:

Schema I



Die Frage, ob für Meßergebnisse A, B, C die Logik gilt oder nicht, ist durch diese Zuordnung auf das Problem zurückgeführt, ob die Logik für Aussagen eines Kalküls gilt.

Die Logik dieser A, B, C wird somit die Logik der Aussagen eines beliebigen Kalküls sein, d. h. die effektive Logik. Darüber hinaus lassen sich jedoch noch einige zusätzliche Regeln beweisen, da man hier außerdem die explizite Form der Aussagen kennt. Das tertium non datur, das effektiv nicht beweisbar ist, gehört zu diesen Regeln. Es sollen jedoch zuerst die effektiv beweisbaren Sätze angegeben werden, und die explizite Gestalt der Aussagen nur zum Beweis der zusätzlichen Regeln verwendet werden.

Unter Benutzung der expliziten Gestalt wird es weiter möglich sein, die mit den logischen Partikeln zusammengesetzten Aussagen $A \wedge B, A \vee B, A \neg B$ explizit anzugeben. Es wird nämlich möglich sein, mit Hilfe der Operatoren P_A und P_B sehr einfache zusammengesetzte Operatoren zu definieren, die den zusammengesetzten Aussagen entsprechen. Von hier aus wird man dann einen einfachen Zugang zu der Möglichkeit finden, zusammengesetzten Aussagen gewisse abgeschlossene Linearmanigfaltigkeiten des HILBERT-Raumes zuzuordnen, ein

Verfahren, von dem insbesondere bei der Behandlung der eigentlichen Quantenlogik in Kap. II.4 ausführlich Gebrauch gemacht werden soll und wodurch man einen unmittelbaren Zugang zu der Theorie von BIRKHOFF und v. NEUMANN [2] gewinnt.

Die gleichen Verhältnisse liegen auch in der gesamten klassischen Physik vor, da diese sich als ein Spezialfall der Theorie kommensurabler Eigenschaften darstellen läßt. Sowohl in der klassischen Physik als auch in der Quantentheorie kommensurabler Eigenschaften läßt sich daher die Anwendung der klassischen Logik rechtfertigen.

Die logischen Begriffe

a) Die Relation $A \rightarrow B$

Wir gehen aus von Aussagen der Form

$$P_A |\varphi\rangle = |\varphi\rangle. \quad (\text{II.1})$$

Zwischen diesen Aussagen möge eine Relation $A \rightarrow B$ definiert werden, die entsprechend zu dem im Anhang eingeführten operativen Sinn besagt, daß, wenn A abgeleitet ist, dann auch B abgeleitet werden kann. In bezug auf die physikalische Bedeutung von A und B heißt „ \rightarrow “, daß aus der Messung von A folgt, daß auch B bei einer geeigneten Messung als zutreffend vorgefunden wird. Beziiglich der Relation $A \rightarrow B$ gelten dann die Regeln:

$$A \rightarrow A, \quad (\text{II.2})$$

$$A \rightarrow B, B \rightarrow C \Rightarrow A \rightarrow C. \quad (\text{II.3})$$

Zum Beweis hat man zu zeigen, daß die Benutzung dieser Regeln aus jeder Ableitung eliminiert werden kann. Wir wollen hierauf nicht näher eingehen. Benutzt man die explizite Form (II.1) der Aussagen, so ist $A \rightarrow B$ notwendig und hinreichend dafür, daß

$$P_A = P_A P_B = P_B P_A \quad (\text{II.4})$$

gilt.

Beziiglich der abgeschlossenen Linearmannigfaltigkeiten ist (II.4) äquivalent zu

$$M_A \subseteq M_B. \quad (\text{II.5})$$

b) Die Konjunktion

Sind A, B Aussagen im obigen Sinne, so führen wir die Konjunktion durch die Regel

$$A, B \rightarrow A \wedge B \quad (\text{II.6})$$

ein. In dem Kalkül der Aussagen A, B , der nicht das Zeichen \wedge enthält, ist dann (II.6) relativ zulässig. Durch Inversion gewinnt man die weiteren Regeln:

$$A \wedge B \rightarrow A, \quad (\text{II.7})$$

$$A \wedge B \rightarrow B, \quad (\text{II.8})$$

$$C \rightarrow A, C \rightarrow B \Rightarrow C \rightarrow A \wedge B. \quad (\text{II.9})$$

Umgangssprachlich würde man $A \wedge B$ mit „„A und B““ übersetzen. Unabhängig von (II.6) können wir (II.7,8,9) als Definitionen der Aussage $A \wedge B$ auffassen. Unter Verwendung der expliziten Form (II.1) folgt aus (II.7,8,9) (vgl. [8])

$$P_{A \wedge B} = P_A \cdot P_B. \quad (\text{II.10})$$

$P_A \cdot P_B$ projiziert auf den Durchschnitt der zu P_A und P_B gehörigen Unterräume M_A und M_B .

c) Die Disjunktion

Durch die Regeln

$$A \rightarrow A \vee B, \quad (\text{II.11})$$

$$B \rightarrow A \vee B \quad (\text{II.12})$$

werden die Aussagen $A \vee B$ eingeführt. (II.11,12) sind relativ zulässig in einem Kalkül, der nicht das Zeichen \vee enthält. Durch Inversion gewinnt man die Regel:

$$A \rightarrow C, B \rightarrow C \Rightarrow A \vee B \rightarrow C. \quad (\text{II.13})$$

Umgangssprachlich würde man $A \vee B$ mit „„A oder B““ übersetzen. (II.11,12,13) kann jetzt wieder als Definition der Aussage $A \vee B$ aufgefaßt werden, denn unter Benutzung der expliziten Form (II.1) der Aussagen ergibt sich, daß analog zu (II.10) (vgl. [8])

$$P_{A \vee B} = P_A + P_B - P_A P_B \quad (\text{II.14})$$

gilt. $P_{A \vee B}$ ist damit eindeutig festgelegt.

$P_{A \vee B}$ projiziert auf den von M_A und M_B aufgespannten Teilraum $M_A \cup M_B$.

d) Die Implikation

Für die oben behandelte Implikation „ \rightarrow “ gelten außer (II.2,3) in der operativen Logik noch die beiden weiteren Relationen

$$A \wedge A \rightarrow B \Leftrightarrow B, \quad (\text{II.15})$$

$$A \wedge C \rightarrow B \Rightarrow C \Leftrightarrow A \rightarrow B. \quad (\text{II.16})$$

Beide Gesetze können wiederum dadurch als gültig bewiesen werden, daß sich ihre Benutzung in jeder Ableitung eliminieren läßt. Man kann (II.15, 16) aber auch als Definition einer neuen Aussage $B \neg A$ auffassen, wenn man \rightarrow wie bisher den Pfeil \rightarrow deutet und statt $A \rightarrow B$ jetzt $B \neg A$ schreibt. (II.16) besagt dann, daß $B \neg A$ die obere Grenze derjenigen Aussagen C ist, die $A \wedge C \rightarrow B$ erfüllen.

Unter Benutzung der expliziten Form (II.1) der Aussagen folgt, daß wegen II.15, 16 (vgl. [8])

$$P_{B \neg A} = 1 - P_A + P_A P_B. \quad (\text{II.17})$$

Es ist interessant, an Hand von (II.17) den Zusammenhang mit der früher eingeführten Relation „ \succ “ zu untersuchen. Man sieht nämlich leicht, daß bereits effektiv gilt:

$$A \rightarrow B \Leftrightarrow V \rightarrow B \neg A, \quad (\text{II.18})$$

wobei V „das Wahre“ eine Aussage ist, für die alle Regeln $V \rightarrow A$ zulässig sind. Zum Beispiel ist $B \neg B$ für beliebige B eine solche Aussage. Unter Verwendung der expliziten Gestalt bedeutet (II.18)

$$P_A = P_A P_B \Leftrightarrow P_{B \neg A} = 1. \quad (\text{II.19})$$

$P_{B \neg A}$ ist also der Einheitsoperator, wenn $A \rightarrow B$ gültig ist. Es liegt nahe, diesen Sachverhalt im Rahmen einer „Metalogik“ so zu interpretieren, daß $B \neg A$ dann „wahr“ ist, wenn zwischen A und B die Relation $A \rightarrow B$ besteht. $B \neg A$ ist ja jetzt nicht mehr als eine Relation, sondern als eine Aussage aufzufassen. (Vgl. dazu CURRY [12].)

Der Zusammenhang mit der Theorie der linearen Unterräume des HILBERT-Raumes ist hier der, daß

$$P_{B \neg A} = 1 - P_A + P_A P_B \quad (\text{II.20})$$

auf den Unterraum $M_B \cup (H - M_A)$ projiziert, also auf alle Teilräume, die aus Linearkombinationen der Elemente von M_B und von $H - M_A$ bestehen. Wir werden hierauf im Zusammenhang mit der Negation noch einmal zurückkommen.

e) Negation

Zur Definition der Negation nehmen wir an, daß der Kalkül eine Λ -Aussage enthält, also eine Aussage, die für alle Aussagen A die Relation $\Lambda \rightarrow A$ erfüllt. In den hier untersuchten Kalkülen wird stets eine Λ -Aussage existieren. Zur Einführung der Negation verwenden wir dann die in der Formalisierung der intuitionistischen Logik verwendete Definition:

$$\neg A = A \rightarrow \Lambda. \quad (\text{II.21})$$

Auf Grund dieser Definition gelten dann die beiden Sätze:

$$A \wedge \neg A \rightarrow \Lambda, \quad (\text{II.23})$$

$$A \wedge B \rightarrow \Lambda \Rightarrow B \rightarrow \neg A. \quad (\text{II.23})$$

Die explizite Form der Aussage $\neg A$ ist auf Grund der Definition leicht zu finden. Zunächst ist für alle A : $P_{\neg A} = P_{\neg} P_A$, also $P_{\neg} = 0$. Nach (II.21) ist weiter $\neg A = \Lambda \neg A$, so daß wegen (II.20) folgt:

$$P_{\neg A} = 1 - P_A. \quad (\text{II.24})$$

$P_{\neg A}$ projiziert also auf den zu M_A totalsenkrechten Unterraum $H - M_A$. Auf Grund von (II.24) läßt sich über die effektive Logik hinaus beweisen, daß alle Aussagen stabil sind, also

$$\neg \neg A \Leftrightarrow A, \quad (\text{II.25})$$

$$P_{\neg \neg A} = 1 - (1 - P_A) = P_A.$$

Das tertium non datur

$$V \rightarrow A \vee \neg A \quad (\text{II.26})$$

ist also für alle Aussagen relativ zulässig. Darüber hinaus kann man (II.26) hier wegen (II.14) und (II.24) auch direkt beweisen, denn es gilt $P_V = 1$ und

$$P_A \wedge \neg A = P_A + P_{\neg A} - P_A P_{\neg A} = 1. \quad (\text{II.27})$$

Wir fassen noch einmal die im vorangegangenen Abschnitt gewonnenen Darstellungen der logischen Begriffe zusammen.

A	P_A	M_A
$\neg A$	$1 - P_A$	$H - M_A$
$A \wedge B$	$P_A P_B$	$M_A \cap M_B$
$A \vee B$	$P_A + P_B - P_A P_B$	$M_A \cup M_B$
$A \neg B$	$1 - P_B + P_A P_B$	$M_A \cup (H - M_B)$
$A \rightarrow B$	$P_A = P_A P_B$	$M_A \subseteq M_B$.

Für diese Begriffe wurden zunächst im Rahmen der effektiven Logik die folgenden Sätze bewiesen:

- (1) $A \rightarrow A$ (II.28)
- (2) $A \rightarrow B, B \rightarrow C \Rightarrow A \rightarrow C$
- (3) $A \wedge B \rightarrow A$
- (4) $A \wedge B \rightarrow B$
- (5) $C \rightarrow A, C \rightarrow B \Rightarrow C \rightarrow A \wedge B$
- (6) $A \rightarrow A \vee B$
- (7) $B \rightarrow A \vee B$
- (8) $A \rightarrow C, B \rightarrow C \Rightarrow A \vee B \rightarrow C$
- (9) $A \vee A \rightarrow B \Leftrightarrow B$
- (10) $A \wedge C \rightarrow B \Rightarrow C \Leftrightarrow A \rightarrow B$
- (11) $A \wedge \neg A \Leftrightarrow A$
- (12) $A \wedge C \rightarrow A \Rightarrow C \rightarrow \neg A.$

Unter Benutzung der expliziten Form der Aussagen konnte darüber hinaus gezeigt werden, daß alle Aussagen stabil sind:

$$A \Leftrightarrow \neg \neg A \quad (\text{II.29})$$

und das tertium non datur

$$V \rightarrow A \vee \neg A \quad (\text{II.30})$$

gilt.

II.4 Die Logik der incommensurablen Eigenschaften

Die im vorangegangenen Kapitel behandelte Logik der kommensurablen Eigenschaften ist eine Logik, die für alle Aussagen gilt, die simultan an einem physikalischen System gemessen werden können. Man könnte daher versucht sein zu meinen, daß damit das Problem der Logik in der Quantentheorie abgeschlossen werden könne, da man sich für alle weiteren Aussagen, die ja nach Voraus-

setzung nicht mehr gleichzeitig meßbar sind, gar nicht zu interessieren brauchte. Dagegen ist jedoch der Einwand zu erheben, daß es eben eine der bemerkenswerten Ergebnisse der Quantentheorie ist, daß man an einem gegebenen System jede beliebige Eigenschaft E_A messen kann. Denn die Behauptung, daß E_A mit einer anderen Eigenschaft E_B nicht gleichzeitig meßbar ist, besagt ja nicht, daß E_A nicht gemessen werden kann, wenn E_B schon gemessen ist, sondern daß die Messung von E_A das Resultat der vorangegangenen E_B -Messung ganz oder teilweise zerstört.

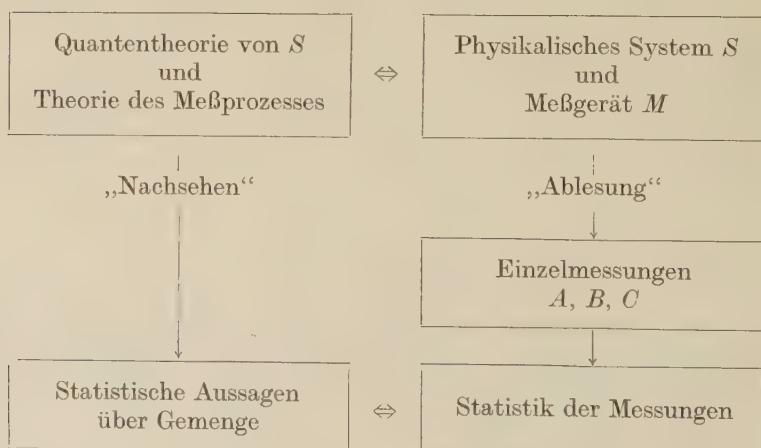
Unter diesen Umständen liegt es nahe, sich nicht auf die Untersuchung einer bestimmten Klasse kommensurabler Eigenschaften zu beschränken, sondern diese zur Klasse aller meßbaren Eigenschaften zu erweitern. Denn oft wird es gar nicht bekannt sein, ob zwei Eigenschaften E_A und E_B kommensurabel sind oder nicht, so daß es sinnvoll ist, von vornherein beliebige Eigenschaften in Betracht zu ziehen. Es soll daher in diesem Kapitel die Frage untersucht werden, ob sich die für die kommensurablen Eigenschaften gefundenen logischen Regeln ganz oder wenigstens teilweise auf die Klasse beliebiger Eigenschaften übertragen lassen, was dann zu einer „Logik“ allgemein inkommensurabler Eigenschaften führen würde.

Bei kommensurablen Aussagen war oben die Gültigkeit der Logik dadurch gezeigt worden, daß eine eindeutige Abbildung der physikalischen Aussagen auf Kalkülaussagen angegeben werden konnte.

In der Quantenmechanik allgemein inkommensurabler Eigenschaften versagt das obige Abbildungsschema. Zwar ist es möglich, dem unbeobachteten System eindeutig den Formalismus der Quantentheorie zuzuordnen, für die Meßergebnisse ist dies jedoch nicht möglich. Die Messung einer beliebigen Größe E_A verändert nämlich den Zustand des Systems in einer solchen Weise, daß der neue Zustand ein Eigenzustand von P_A ist. Da ein entsprechender Vorgang beim „Nachsehen“ in einem Kalkül naturgemäß nicht möglich ist, versagt hier die Zuordnung der Meßergebnisse zu den ableitbaren Aussagen.

Man könnte natürlich daran denken, den Meßapparat M , der diese störenden Wirkungen auf das System ausübt, mit in das System einzubeziehen, so daß

Schema II



$(S+M)$ das neue System ist, und die Messung sich auf die reine Ablesung der Resultate reduziert. Dieser letzte Schritt ist imsofern unproblematisch, als er kein spezifisch quantentheoretisches Element mehr enthält. Man sieht jedoch leicht, daß man durch ein solches Vorgehen wenig gewinnt (vgl. dazu Schema II).

Dem System $(S+M)$ hätte man die Theorie von $(S+M)$ zuzuordnen, also die Quantentheorie von S und die Theorie des Meßprozesses. Die Theorie des Meßprozesses macht aber nur die Aussage (vgl. SÜSSMANN [13]), daß der Operator $|f\rangle\langle f|$ des Systems bei der Messung der Observablen A durch die Wechselwirkung des Systems mit dem Meßgerät gemäß der Formel

$$|f\rangle\langle f| \approx \sum |A_i\rangle\langle A_i|f\rangle\langle f|A_i\rangle\langle A_i|.$$

in den statistischen Operator eines Gemenges übergeht. Über den wirklichen Ausgang eines einzelnen Experiments kann die Theorie nichts aussagen. Durch „Nachsehen“ im Kalkül gewinnt man also immer nur statistische Aussagen, die man demgemäß nur mit den statistischen Aussagen über viele Experimente vergleichen kann. Die statistischen Aussagen über viele Experimente sollten daher auch wieder der klassischen Logik gehorchen. Da die Theorie aber über den Ausgang einer einzelnen experimentellen Messung keinerlei Aussagen macht, existiert jetzt auch keine Zuordnung mehr zwischen Meßergebnissen und Kalkülaussagen. Es besteht daher auch kein Grund mehr anzunehmen, daß beliebige im allgemeinen inkommensurabile Eigenschaften eines Systems S der klassischen Logik gehorchen. Diese bemerkenswerten Tatsachen, daß nämlich quantenphysikalische Aussagen im allgemeinen nicht mehr kalkülisierbar, d. h. auf Kalkülaussagen abbildbar sind, wird in der Literatur häufig als Verlust der Kausalität bezeichnet. Denn selbst aus einer maximalen Kenntnis des betrachteten Systems — also eines Zustandes — läßt sich der Meßwert einer beliebigen Observablen nicht mehr vorausberechnen. Inwiefern die Berechenbarkeit eines Meßergebnisses jedoch tatsächlich als Kausalität bezeichnet werden kann, soll hier nicht diskutiert werden.

Gehen wir nun von allgemein inkommensurablen, d. h. beliebigen an einem System S meßbaren Eigenschaften aus. Der Begriff der Logik war bisher nur für Aussagen eines Kalküls definiert, nicht aber für beliebige Aussagen. Die hier untersuchten Eigenschaften A, B, C bilden zwar keinen Kalkül, aber eine Schar von Kalkülen K_1, K_2, \dots , die von den jeweils miteinander kommensurablen Eigenschaften gebildet werden. Da eine solche Schar jedoch in gewisser Hinsicht wie ein einziger Kalkül behandelt werden kann, wollen wir dafür die Bezeichnung Quasikalkül verwenden.

Um eine Logik in einem für solche Quasikalküle verallgemeinerten operativen Sinne aufzubauen, untersuchen wir Regeln $A \rightarrow B$, die den folgenden Sinn haben: Ist E_A an einem System durch eine Messung nachgewiesen, so hat dieses System auch die Eigenschaft E_B , d. h. eine Messung wird stets das Vorliegen von E_B ergeben. Unter diesen Regeln und den komplizierteren der Form $C \rightarrow A \rightarrow B$ fragen wir nach denjenigen, die unabhängig von den speziellen Aussagen stets gelten, d. h. deren Benutzung eliminiert werden kann. Da der Begriff der Ableitung zunächst nur für Kalküle definiert ist, hat eine Ableitung in einem Quasikalkül gemäß der Definition eines Quasikalküls überhaupt nur einen Sinn, wenn sie sich durch eine Ableitung in einem der wirklichen Kalküle ersetzen läßt. Entsprechend ist unter der Elimination einer Regel R jetzt zu verstehen, daß man eine Ableitung im Quasikalkül, die die Regel R benutzt, unter Beibehaltung

der Endaussage ersetzt durch eine Ableitung in einem der Kalküle K_i , die die Regel R nicht benutzt.

Um diesen für Quasikalküle verallgemeinerten Eliminationsbegriff auf konkrete Fälle anwenden zu können, müssen noch die Ableitungen, die sich in einem speziellen Kalkül K , abspielen, gegenüber den beliebigen Ableitungen im Quasikalkül genauer charakterisiert werden. Dies ist aber leicht möglich, wenn man beachtet, daß die in einem Kalkül auftretenden Eigenschaften im Gegensatz zu denen des Quasikalküls stets kommensurabel sind. Eine Ableitung, in der allgemeine Aussagen über das System S auftreten, gehört deshalb jedenfalls dann einem der Kalküle K_i an, falls in der Ableitung zwei Aussagen nur dann explizit¹⁾ auftreten, wenn sie ausdrücklich als kommensurabel vorausgesetzt sind. Diese Forderung, die die gleichzeitige Verwendung komplementärer Eigenschaften verbietet, wollen wir als Komplementaritätsprinzip bezeichnen:

Zum Beweis einer bestimmten Regel, Metaregel usw. im Rahmen eines Quasikalküls hat man also zu zeigen, daß sich jede Ableitung innerhalb des Quasikalküls, die diese Regel benutzt, ersetzen läßt durch eine Ableitung in einem Kalkül mit der gleichen Endaussage, die die Regel nicht benutzt und die außerdem dem Komplementaritätsprinzip genügt.

Man kann daher einen Quasikalkül auffassen als einen „Kalkül“, d. h. ein System von Anfangsaussagen, Regeln, Metaregeln usw., in dem aber die Eliminierbarkeit einer Regel nicht allein mit Hilfe der sonst in Kalkülen gültigen protologischen Prinzipien bewiesen werden kann, sondern in dem zusätzlich das Komplementaritätsprinzip beachtet werden muß.

In dieser Betrachtungsweise läßt sich das Komplementaritätsprinzip als ein neues protologisches Prinzip auffassen, welches die operativen Möglichkeiten, die sonst in Kalkülen bestehen, gewissen einschränkenden Bedingungen unterwirft. Ein Quasikalkül erscheint so als ein Kalkül, dessen Protologik durch die Hinzunahme des Komplementaritätsprinzips gegenüber der üblichen Protologik verändert ist.

Von einem mehr physikalischen Aspekt her gesehen heißt das, daß man stets beachten muß, daß die Aussagen eines Quasikalküls zunächst nur als mögliche Meßergebnisse definiert sind, deren Meßbarkeit von der Physik her gewissen Kommensurabilitätsbedingungen unterworfen ist. Eine Ableitung, die sich ihrem Wesen nach stets auf ein physikalisches System in einem bestimmten Zustand bezieht, darf daher nur dann zwei Aussagen explizit enthalten, wenn diese gleichzeitig meßbar sind.

Für das Operieren in einem Quasikalkül hat das zur Folge, daß man diese Aussagen nicht einfach als Figuren (z. B. aus Steinchen) ansehen kann, mit denen man beliebig operieren darf, sondern daß die operative Verfügbarkeit über die Aussagen bestimmten, durch die physikalische Herkunft der Aussagen bedingten Einschränkungen unterliegt.

Auf Grund dieser Betrachtungen ist jetzt klar, wann man eine bestimmte Regel, Metaregel usw. in einem Quasikalkül als eliminierbar bezeichnen kann. Wir wollen nun wieder die Gesamtheit aller Regeln, Metaregeln usw. untersuchen, die so als allgemein gültig, d. h. für beliebige Aussagen und für beliebige Quasikalküls als eliminierbar nachgewiesen werden können. Dieses System allgemein-

¹⁾ Unter explizitem Auftreten einer Aussage A in einer Ableitung verstehen wir hier, daß eine bestimmte Zeile dieser Ableitung nur diese Aussage enthält.

gültiger Regeln wollen wir als operative oder auch effektive Quantenlogik bezeichnen.

In dieser Quantenlogik allgemein inkommensurabler Eigenschaften werden wir daher die Frage zu untersuchen haben, in welchem Umfang sich die aus der klassischen Logik bekannten Gesetze auch noch unter Beachtung des Komplementaritätsprinzips beweisen lassen, d. h. ob vielleicht einige dieser Gesetze so allgemein gelten, daß man nicht notwendig die Kommensurabilität der in ihnen enthaltenen Aussagen explizit verlangen muß.

Der Aufbau der effektiven Quantenlogik, also der effektiven Logik allgemein inkommensurabler Eigenschaften, vollzieht sich ähnlich wie der der operativen klassischen Logik. Ausgehend von dem oben besprochenen allgemeinen Aussagetyp, der einem möglichen Experiment entspricht, werden wir untersuchen, welche Regeln, Metaregeln usw. stets eliminierbar sind, wobei aber jetzt zu den bekannten protologischen Prinzipien, mit deren Hilfe die Eliminierbarkeit bisher bewiesen wurde, noch das Komplementaritätsprinzip hinzugenommen werden muß. Wir werden sehen, daß dies für alle Regeln bis auf eine Ausnahme tatsächlich der Fall ist. Die Gesamtheit dieser Regeln bildet dann die effektive Quantenlogik.

Während das im operativen Aufbau der Quantenlogik benötigte Komplementaritätsprinzip nur eine Minimalforderung darstellt, die man an die Aussagen zu stellen hat, um die effektive Quantenlogik herzuleiten, ist in Wirklichkeit viel mehr über diese Aussagen bekannt, da man ihre explizite Form genau kennt. Aus der Tatsache, daß die Aussagen die Form $P_A|f\rangle = |f\rangle$ haben, lassen sich daher auch weitere Regeln herleiten, die zwar nicht effektiv, aber speziell für die hier untersuchte Logik quantenmechanischer Aussagen gelten. Das tertium non datur ist von dieser Art. Die um diese speziell für quantenlogische Aussagen gültigen Regeln erweiterte effektive Quantenlogik werden wir im folgenden kurz als Quantenlogik bezeichnen.

a) Die Relation $A \rightarrow B$

Es seien A, B, C beliebige Aussagen, P_A, P_B, P_C die entsprechenden Projektionsoperatoren, so daß etwa A durch

$$A = P_A|f\rangle = |f\rangle \quad (\text{II.31})$$

definiert ist, und M_A, M_B, M_C seien die abgeschlossenen Linearmannigfaltigkeiten, auf die die Projektionsoperatoren projizieren.

Wir führen dann zwischen zwei Aussagen A und B die Relation $A \rightarrow B$ ein, wobei $A \rightarrow B$ bedeutet, daß, wenn eine Eigenschaft A gemessen ist, dann auch B gemessen ist, d. h. daß jede Messung, die eine positive Entscheidung über das Vorliegen von A fällt, auch das Vorliegen von B ergibt. Auf Grund dieser Definition ist klar, daß die Gültigkeit von $A \rightarrow B$ unter anderem besagt, daß A und B kommensurabel sind. Für die Relation „ \rightarrow “ gelten die beiden Regeln

$$A \rightarrow A, \quad (\text{II.32})$$

$$A \rightarrow B, B \rightarrow C \Rightarrow A \rightarrow C. \quad (\text{II.33})$$

Zum Beweis einer Formel $A \rightarrow B$ hat man zu zeigen, daß im Quasikalkül der Aussagen A, B, C jede mit Hilfe von $A \rightarrow B$ hergeleitete Aussage auch ohne diese

Regel hergeleitet werden kann. Für $A \rightarrow A$ ist das der Fall, wie man sich leicht überzeugt. (II.33) behauptet, daß die Regel $A \rightarrow C$ dann entbehrlich ist, wenn man die Regeln $A \rightarrow B$ und $B \rightarrow C$ zum Kalkül hinzunimmt. Eine Ableitung, die $A \rightarrow C$ benutzt, sieht folgendermaßen aus:

$$\begin{array}{c} 1. \dots \dots A \\ \dots \dots \dots \\ A \rightarrow C \vdash n \dots \dots C \end{array}$$

Nimmt man die Regeln $A \rightarrow B$ und $B \rightarrow C$ jedoch hinzu, so kann auf $A \rightarrow C$ verzichtet werden, wie die folgende Ableitung zeigt:

$$\begin{array}{c} 1. \dots \dots A \\ \dots \dots \dots \\ A \rightarrow B \vdash n. \dots \dots B \\ A \rightarrow C \quad n+1. \dots \dots C \end{array}$$

Benutzt man die explizite Form der Aussagen A , B , C , so bedeutet $A \rightarrow B$, daß immer dann, wenn $P_A|f\rangle = |f\rangle$ gilt, folgt, daß auch $P_B|f\rangle = |f\rangle$ gültig ist, und zwar für jedes $|f\rangle$. Dafür ist notwendig und hinreichend, daß

$$P_A = P_A P_B = P_B P_A. \quad (\text{II.34})$$

ist.

Bezüglich der abgeschlossenen Linearmannigfaltigkeiten M_A , M_B und M_C ist (II.34) wiederum äquivalent zu

$$M_A \subseteq M_B. \quad (\text{II.35})$$

b) Die Konjunktion

Sind A und B Aussagen einer Theorie, so werde eine neue Aussage $A \wedge B$ gemäß der Regel

$$A, B \rightarrow A \wedge B \quad (\text{II.36})$$

eingeführt. Enthält ein Kalkül wenigstens A und B und nicht das Zeichen \wedge , so ist (II.36) relativ zulässig. Durch Inversion ergeben sich dann wieder die Regeln.

$$A \wedge B \rightarrow A, \quad (\text{II.37})$$

$$A \wedge B \rightarrow B, \quad (\text{II.38})$$

$$C \rightarrow A, C \rightarrow B \Rightarrow C \rightarrow A \wedge B. \quad (\text{II.39})$$

Vom inhaltlichen Gesichtspunkt würde man $A \wedge B$ durch „ A und B “ übersetzen, jedoch sind die folgenden Ableitungen nicht vom inhaltlichen Sinn des Wortes „und“ abhängig. Ohne Bezug auf (II.36) können wir jetzt (II.37.38.39) als eine Definition der Aussage $A \wedge B$ auffassen, die $A \wedge B$ im Rahmen der hier diskutierten Aussagen eindeutig festgelegt ist. Sei

$$A \wedge B \Leftrightarrow P_{A \wedge B}|f\rangle = |f\rangle$$

die gesuchte Aussage und betrachten wir andererseits den Operator $P_{A \wedge B}$, der auf $M_A \cap M_B$ projiziert, so gilt wegen (II 37, 38, 39) (vgl. dazu [8])

$$P_{A \wedge B} = P_{A \cap B}. \quad (\text{II.40})$$

Damit ist aber $P_{A \wedge B}$ eindeutig bestimmt als der Operator, der auf den Raum $M_A \cap M_B$ projiziert. Eine Darstellung von $P_{A \wedge B}$ als Produkt der Operatoren P_A und P_B ist jedoch jetzt nicht mehr möglich, da $P_A P_B$ im allgemeinen kein Projektionsoperator ist.

c) Die Disjunktion

Es seien A und B beliebige Aussagen über das System. Durch die Regeln

$$A \rightarrow A \vee B, \quad (\text{II.41})$$

$$B \rightarrow A \vee B \quad (\text{II.42})$$

führen wir die neue Aussage $A \vee B$ ein. Die Regeln (II.41, 42) sind in dem Kalkül, der die Aussagen A und B enthält, aber nicht das Zeichen \vee , relativ zulässig. Durch Inversion gewinnt man weiter die Regel

$$A \rightarrow C, B \rightarrow C \Rightarrow A \vee B \rightarrow C, \quad (\text{II.43})$$

die in dem Kalkül, der die Aussagen A und B und die Regeln (II.41, 42) enthält, relativ zulässig ist. Umgangssprachlich würde man $A \vee B$ mit „ A oder B “ übersetzen, ebenso wie in der in Kap. II.3 behandelten Logik. Die im folgenden durchgeführten Ableitungen sind jedoch wiederum nicht von dem inhaltlichen Sinn des Wortes „oder“ abhängig. Es mag deshalb hier genügen festzustellen, daß das Zeichen \vee ebenso wie in der gewöhnlichen Logik definiert wird und deshalb mit der gleichen Berechtigung wie dort mit „oder“ übersetzt werden kann.¹⁾

Die Regeln (II.41, 42, 43) können als eine Definition von $A \vee B$ angesehen werden. Die Aussage $A \vee B$ ist durch (II.41, 42, 43) eindeutig festgelegt. Sei nämlich

$$A \vee B \Leftrightarrow P_{A \vee B}|f\rangle = |f\rangle,$$

so folgt, daß

$$P_{A \wedge B} = P_{A \cup B} \quad (\text{II.44})$$

ist, also $P_{A \vee B}$ genau derjenige Projektionsoperator ist, der auf $M_A \cup M_B$ projiziert (vgl. [8]).

$$P_{A \vee B}|f\rangle = |f\rangle.$$

Gilt also genau dann, wenn $|f\rangle \subseteq M_A \cup M_B$. Eine Darstellung des Operators $P_{A \vee B}$ durch $P_A + P_B - P_A P_B$ wie im vorigen Abschnitt, ist jedoch hier nicht möglich, da $P_A + P_B - P_A P_B$ bei nicht vertauschbaren P_A und P_B kein Projektionsoperator mehr ist.

¹⁾ Daß von einem semantischen Gesichtspunkt aus dennoch gewisse Unterschiede zwischen dem klassischen und dem quantenlogischen „oder“ bestehen, wurde kürzlich von E. RICHTER [24] gezeigt (persönliche Mitteilung).

d) Die Implikation

In der Logik der commensurablen Eigenschaften, die sich stets auf die Logik der Kalküle zurückführen läßt, gelten, wie in Kap. II.3 gezeigt wurde, für die Relation „ \rightarrow “ außer den oben eingeführten Halbordnungsrelationen (II.32, 33) noch die beiden Regeln

$$A \wedge A \rightarrow B \Rightarrow B, \quad (\text{II.45})$$

$$A \wedge C \rightarrow B \Rightarrow C \Rightarrow A \rightarrow B. \quad (\text{II.46})$$

Die Regeln (II.45, 46) konnten dort weiterhin als Definition einer neuen Aussage, der Implikation $B \dashv A$, aufgefaßt werden, wenn man wie bisher durch die Halbordnung (II.32, 33) erklärt.

Sind die Eigenschaften A, B, C nicht mehr allgemein commensurabel, so muß die Gültigkeit von (II.45, 46) erneut bewiesen werden. Um zu zeigen, daß (II.45) auch weiterhin gültig ist, muß man zeigen, daß aus jeder Ableitung eliminiert werden kann, wenn die Aussagen A und die Regel $A \rightarrow B$ gegeben ist. Dies ist aber stets möglich, ohne daß man explizit die Commensurabilität von A und B fordern muß, wie man sich leicht an einer beliebigen Ableitung, in der B vorkommt, klarmachen kann.

Die Beziehung (II.46) ist jedoch nicht mehr allgemeingültig. Um die Gültigkeit nachzuweisen, hätte man zu zeigen, daß die Metaregel $C \Rightarrow A \rightarrow B$ aus jeder Ableitung in einem Metakalkül eliminiert werden kann, wenn dieser Kalkül die Regel $A \wedge C \rightarrow B$ enthält. Der Beweis dieser Behauptung lautet:

1. C
2. $A, C \rightarrow B$
3. $A \rightarrow A$
- $1 \vdash 4. A \rightarrow C$
- $2, 3, 4 \vdash 5. A \rightarrow B$ wegen (II.33 und II.39).

Bei diesem Beweis wurde in der vierten Zeile Gebrauch gemacht von der Metaregel $C \Rightarrow A \rightarrow C$. Zum Beweis hat man zu zeigen, daß jede Ableitung, die $A \rightarrow C$ benutzt, durch eine andere Ableitung ersetzt werden kann, die $A \rightarrow C$ nicht benutzt, wenn man C zu den Anfängen des betreffenden Kalküls hinzunimmt. Eine Ableitung, die $A \rightarrow C$ benutzt, hat die Form:

1. A
-
- $1. \vdash n. C \quad (A \rightarrow C).$

Die Metaregel $C \Rightarrow A \rightarrow C$ besagt nun, daß man auf $A \rightarrow C$ verzichten kann, wenn man C zum Kalkül hinzunimmt, also die obige Ableitung folgendermaßen umformt:

0. C
1. A
- $0 \vdash n. C$ (III.32)

Man nimmt also C (in Zeile 0) hinzu und gewinnt jetzt C in Zeile n durch Verweis auf Zeile C statt auf Zeile 1, unter Benutzung von (II.32). In dieser Ableitung

muß man also annehmen, daß man C wirklich hinzunehmen kann, d. h. daß A und C explizit mit derselben Ableitung auftreten können. Nach dem oben formulierten Komplementaritätsprinzip ist das aber nur möglich, wenn A und C kommensurabel sind. Für beliebige Aussagen A und C ist die Hinzunahme von C in der zweiten Ableitung daher nicht möglich. $A \rightarrow C$ ist somit nicht durch eine andere Ableitung zu eliminieren, weshalb $C \cdot A \rightarrow C$ nicht als gültig nachgewiesen werden kann. Damit wird dann auch der oben angeführte Beweis von

$$A \wedge C \rightarrow B \Rightarrow C \Leftrightarrow A \rightarrow B$$

gegenstandslos. Dagegen sind gegen beide Beweise keine Bedenken zu erheben, wenn man A und C als kommensurabel annimmt. Denn über die Kommensurabilität von A mit B und C mit B braucht offensichtlich in den genannten Eliminationsverfahren nichts vorausgesetzt zu werden.

Die Tatsache, daß (II.46) nicht mehr allgemein gilt, hat zur Folge, daß man die beiden Beziehungen (II.45, 46) jetzt auch nicht mehr zur Definition der Implikation $B \neg A$ verwenden kann. Vielmehr wird jetzt eine solche Aussage $B \neg A$, die durch (II.45, 46) definiert wäre, gar nicht existieren.

e) Die Negation

Zur Definition der Negation einer Aussage A gehen wir wiederum vom intuitiv-nistischen Begriff der Negation aus und definieren eine Negation $\neg A$ durch

$$\neg A = A \rightarrow 1. \quad (\text{II.47})$$

Unter 1 wollen wir wie bisher eine Aussage verstehen, für die jede Regel $1 \rightarrow A$ zulässig ist. In Kap. II.3 sahen wir bereits, daß es stets eine solche 1-Aussage gibt, nämlich

$$A \Leftrightarrow P_A |f\rangle = |f\rangle \quad \text{mit} \quad P_A = 0. \quad (\text{II.48})$$

Die in Kap. II.3 untersuchten kommensurablen Eigenschaften bilden einen implikativen Verband, in dem stets ein relatives Pseudokomplement zwischen zwei Eigenschaften A und B existiert. Die 1-Aussage ist nun mit allen anderen Aussagen kommensurabel, so daß das Pseudokomplement $A \rightarrow 1 \equiv A \neg A$ stets existiert. Entsprechend (II.20) ist

$$\neg A \Leftrightarrow P_{\neg A} |f\rangle = |f\rangle \quad (\text{II.49})$$

mit

$$P_{\neg A} = 1 - P_A + P_A P_{\wedge} = 1 - P_A \quad (\text{II.50})$$

ebenso wie bei kommensurablen Eigenschaften.

Zunächst gilt, wie stets für ein Pseudokomplement, der Satz vom Widerspruch

$$A \wedge \neg A \rightarrow 1 \quad (\text{II.51})$$

und

$$A \wedge B \rightarrow A \Rightarrow B \rightarrow \neg A.$$

Für die speziell hier verwendeten Aussagen $P_A |f\rangle \dashv |f\rangle$ gilt, daß die Eigenschaften A stabil sind, also

$$\neg \neg A \Leftrightarrow A \quad (\text{II.52})$$

gilt, und daß weiterhin das tertium non datur mit

$$V \rightarrow A \vee \neg A \quad (\text{II.53})$$

für alle Eigenschaften A gilt.

Wir stellen die in diesem Abschnitt gefundenen Regeln für die logischen Begriffe $\rightarrow, \wedge, \vee, \neg$ hier noch einmal zusammen.

- (1) $A \rightarrow A$ (II.54)
- (2) $A \rightarrow B, B \rightarrow C \Rightarrow A \rightarrow C$
- (3) $A \wedge B \rightarrow A$
- (4) $A \wedge B \rightarrow B$
- (5) $C \rightarrow A, C \rightarrow B \Rightarrow C \rightarrow A \wedge B$
- (6) $A \rightarrow A \vee B$
- (7) $B \rightarrow A \vee B$
- (8) $A \rightarrow C, B \rightarrow C \Rightarrow A \vee B \rightarrow C$
- (9) $A \wedge A \rightarrow B \Leftrightarrow B$
- (10) $A \wedge \neg A \rightarrow A$
- (11) $A \wedge B \rightarrow A \Rightarrow B \rightarrow \neg A.$

Die durch die Regeln (II.54, 1 -11) dargestellte Struktur wollen wir als die effektive Quantenlogik bezeichnen, da die Regeln 1–11 allein auf Grund der operativen Bedeutung der logischen Partikeln gelten und hier noch kein Gebrauch von der expliziten Gestalt der verwendeten Aussagen gemacht worden ist. Der wesentliche Unterschied zur Logik der kommensurablen Eigenschaften ist darin zu sehen, daß die Regel

$$A \wedge C \rightarrow B \Rightarrow C \Leftrightarrow A \rightarrow B \quad (\text{II.55})$$

nicht mehr allgemein gilt, weshalb es nicht mehr möglich ist, hier eine Implikation $B \neg A$ zu definieren. Vgl. dazu Kap. III.4.

Durch Verwendung der expliziten Gestalt der untersuchten Aussagen konnte über die Regeln (III.54, 1–11) hinaus noch der Stabilität

$$A \leftrightarrow \neg \neg A$$

und der tertium non datur

$$V \rightarrow A \vee \neg A$$

bewiesen werden, wodurch wir zur eigentlichen Quantenlogik geführt werden. Einige weitere Regeln, die jedoch nur unter speziellen Voraussetzungen gültig sind, sollen in Kap. III besprochen werden.

II.5 Das dialogische Begründungsverfahren

Wir sind in den letzten Abschritten davon ausgegangen, daß die Aussagen, für die sich die Logik als evident erweisen läßt, Aussagen eines Kalküls sind. Dies war in keiner Weise eine hinderliche Voraussetzung gewesen, da die meisten

physikalischen Aussagen sich als Kalkülaussagen auffassen lassen bzw., wo dies nicht geht, Aussagen eines Quasikalküls darstellen. Mit Hilfe dieser protologischen Begriffe Kalkül bzw. Quasikalkül war dann die Evidenz der Logik bzw. Quantenlogik für die verschiedenen Gruppen physikalischer Aussagen demonstriert worden.

Es erscheint jedoch etwas künstlich, wenn man Aussagen, die letztlich einem Experiment entnommen seien sollen, erst durch eine Abbildung in eine physikalische Theorie auf Kalkülaussagen zurückführen muß, an denen man dann die Gültigkeit der Logik nachweisen kann. Dies gilt um so mehr, als die Kalkülisierbarkeit eine spezielle in beweistheoretischen Untersuchungen oft vorliegende Eigenschaft von Aussagen ist, hier aber primär physikalische Aussagen vorliegen, die erst innerhalb der theoretischen Physik in mathematische Aussage übertragen werden.

Es ist daher in diesem Zusammenhang interessant, daß LORENZEN zeigen konnte¹⁾, daß die protologische Voraussetzung, die man an Aussagen zu stellen hat, die der Logik gehorchen, keineswegs nur die der Kalkülisierbarkeit ist. Vielmehr genügen sehr allgemeine Eigenschaften, die gar nicht auf die Kalkülisierbarkeit Bezug nehmen und daher sehr viel besser zur Diskussion von physikalischen Aussagen geeignet sind, die ja primär, also ehe man eine theoretische Physik kennt, keine Kalkülaussagen sind. Die allgemein protologische Eigenschaft, um die es sich dabei handelt, wollen wir als „unbeschränkte Verfügbarkeit“ von Aussagen bezeichnen, eine Eigenschaft, die, wie wir sehen werden, einen sehr weiten Rahmen von Aussagen über Wirkliches umfaßt. Unbeschränkt verfügbare Aussagen werden stets der Logik gehorchen. Die quantenmechanischen Aussagen, die früher durch die Quasikalkülisierbarkeit gekennzeichnet waren, sind jetzt durch die schwächere Eigenschaft der beschränkten Verfügbarkeit charakterisiert, aus welcher sich nur die Quantenlogik als gültig nachweisen läßt.

Man geht bei diesen Überlegungen davon aus, daß der Begriff des Beweises, den wir bisher im Hinblick auf die verwendeten Kalküle bzw. Quasikalküle als Eliminierbarkeit interpretiert hatten, keineswegs an diese spezielle Formulierung gebunden ist. Vielmehr meint der Begriff primär nur, daß eine bestimmte aufgestellte Behauptung, die von irgend jemand bezweifelt wird, diesem bewiesen werden kann, d. h. daß der Zweifler von der Richtigkeit der aufgestellten Behauptung überzeugt werden kann.

Im Hinblick auf diesen ursprünglich dialogischen Charakter des Beweises wollen wir von einer Aussage A sagen, sie sei bewiesen, wenn sie in einem Dialog stets erfolgreich verteidigt werden kann. Wir denken uns dazu stets zwei Parteien, einen Proponenten P , der die Behauptung aufstellt, und einen Opponenten O , der sie zu widerlegen versucht. Um eine solche Diskussion in geordneten Formen vorzunehmen, betrachten wir zunächst elementare Aussagen A, B, C . Beziiglich dieser Aussagen müssen P und O sich einig sein, wie die Richtigkeit bzw. Falschheit einer solchen Aussage bewiesen werden kann. Handelt es sich etwa um Kalkülaussagen, so wird man eine Ableitung angeben, handelt es sich um Aussagen, wie „die Sonne scheint am Ort x zur Zeit t “, so wird man dies durch eine Messung zu beweisen haben usw. Allgemein können mit A, B, C auch irgendwelche komplizierten physikalischen Aussagen gemeint sein, wenn nur zwischen P und O

) P. LORENZEN, persönliche Mitteilung; eine ausführliche Darstellung dieses Verfahrens befindet sich in: P. LORENZEN, Metamathematik, Bibliographisches Institut, Mannheim (im Erscheinen).

Einigkeit darüber besteht, mit welcher experimentellen Anordnung die betreffende Aussage bewiesen bzw. widerlegt werden kann.

Man kann, um auch interessantere Sätze diskutieren zu können, dazu übergehen, die Relation $A \rightarrow B$ einzuführen mit der folgenden Erklärung: Wenn jemand (etwa P) $A \rightarrow B$ behauptet, so übernimmt er damit die Verpflichtung für den Fall, daß jemand A beweisen kann, seinerseits nun B zu beweisen. Andererseits ist damit klar, daß man eine Behauptung $A \rightarrow B$ nur dadurch bestreiten kann, daß man selbst A beweist, und nun vom Diskussionspartner den Beweis für B verlangt.

Schematisch lautet eine solche Diskussion:

P	O
$A \rightarrow B$	A
Wieso?	Beweis von A
B	Wieso?
Beweis von B	

Hier ist angenommen, daß es P wirklich gelungen ist, den Satz $A \rightarrow B$ zu beweisen. Im allgemeinen wird das natürlich davon abhängen, wie die Aussagen A und B im einzelnen lauten.

Jedoch wird es einige Sätze $A \rightarrow B$ bzw. kompliziertere der Art $(A \rightarrow B) \rightarrow (C \rightarrow D)$ geben, die unabhängig davon, wie die Aussagen A, B, C, \dots beschaffen sind, immer gelten, d. h. immer erfolgreich in einer Diskussion verteidigt werden können. Zum Beispiel ist dies der Fall bei

$$A \rightarrow (B \rightarrow A),$$

denn die Diskussion lautet:

P	O
1) $A \rightarrow (B \rightarrow A)$	1) A
2) Wieso?	2) Beweis von A
3) $B \rightarrow A$	3) B
4) Wieso?	4) Beweis von B
5) A	5) Wieso?
6) Beweis von A steht schon in Zeile O 2	

Der Beweis erfolgt hier in P 6 also dadurch, daß auf einen vom Gegner (O) schon früher geführten Beweis (Zeile O 2) verwiesen wird, wodurch sich P einen erneuten Beweis erspart.

Auf diese und ähnliche Weise kann man von sämtlichen Sätzen (II.28, 1–12) der effektiven Logik zeigen, daß sie in einer Diskussion stets erfolgreich verteidigt werden können. Man kann daher die Gültigkeit der effektiven Logik nachweisen, ohne daß man sich wie oben auf Kalkülaussagen beschränken muß.

Auch die fiktive Logik läßt sich im Rahmen dieses dialogischen Verfahrens verstehen, wenn man einige erweiternde Abänderungen in den Regeln des Dialogs vornimmt. Da das Problem des tertium non datur hier nicht wesentlich ist, wollen wir darauf nicht näher eingehen und verweisen in diesem Zusammenhang auf die Literatur.¹⁾

Es ist jedoch für die folgenden Betrachtungen außerordentlich wichtig, daß wir an die elementaren Aussagen A, B, C, \dots stillschweigend die Forderung geknüpft haben, daß sie „unbeschränkt verfügbar“ sein sollen. Zum Beispiel wurden in dem oben demonstrierten Dialog über $A \rightarrow (B \rightarrow A)$ der letzte Beweisschritt durch Zitieren des Gegners (Zeile O 2) durchgeführt. Es wurde also die Annahme gemacht, daß eine einmal bewiesene Behauptung stets wieder zitiert werden kann, ohne daß man den Beweis deshalb zu wiederholen braucht. Diese Eigenschaft wollen wir als „unbeschränkte Verfügbarkeit“ der Aussagen A, B, C bezeichnen. Diese unbeschränkte Verfügbarkeit, die zunächst eine fast triviale Eigenschaft aller Aussagen zu sein scheint, liegt jedoch bei Aussagen über die quantentheoretisch-physikalische Wirklichkeit nicht vor. Das ist dann auch der Grund dafür, daß in dem dialogischen Beweisverfahren für solche Aussagen nicht die Logik, sondern nur die Quantenlogik als gültig nachgewiesen werden kann.

Um dies zu zeigen, gehen wir wieder aus von einem Paar inkommensurabler Aussagen A und B über ein bestimmtes physikalisches System S (z. B. ein Elektron). A möge heißen: S hat den Ort $x = x_0$; B möge heißen: S hat den Impuls $p = p_0$. An Hand dieser speziellen Aussagen wollen wir dann den oben geführten Beweis des Satzes $A \rightarrow (B \rightarrow A)$ noch einmal wiederholen.

*P**O*

1) $A \rightarrow (B \rightarrow A)$	1) A
2) Wieso?	2) Beweis durch Experiment an S
3) $B \rightarrow A$	3) B
4) Wieso?	4) Beweis durch Experiment an S
5) A	5) Wieso?

Der Beweis von A durch ein Experiment kann aber im allgemeinen gar nicht erbracht werden. Es wurde in O 2 gezeigt, daß der Ort $x = x_0$ ist (also A gilt). In Zeile O 4 wurde dann eine Impulsmessung ausgeführt, die $p = p_0$ ergab, also die Behauptung B .²⁾ Damit ist aber das Ergebnis der in O 2 ausgeführten Ortsmessung $x = x_0$ (also die Gültigkeit von A) zerstört worden, weshalb sich P in Zeile P 5 auch nicht auf dieses Experiment berufen kann. Es müßte neu ausgeführt werden, was aber, wie wir wissen, im allgemeinen nicht zu dem Ergebnis $x = x_0$ (also A) führt, wie es der Satz $A \rightarrow (B \rightarrow A)$ behauptet.

¹⁾ P. LORENZEN, Metamathematik I. c.

²⁾ Es ist keineswegs sicher, daß eine Impulsmessung $p = p_0$ ergibt, vielmehr wird man im allgemeinen irgendein beliebiges Ergebnis erhalten. Wir wollen hier aber annehmen, daß die Messung (zufällig) gerade $p = p_0$ ergeben hat, da sonst die Diskussion nicht zu einer Prüfung des Satzes $A \rightarrow (B \rightarrow A)$ geeignet wäre. Man hätte sonst die Diskussion und die damit verbundenen Experimente sooft zu wiederholen, bis sich tatsächlich einmal $p = p_0$ ergibt.

Wir sehen hier also, daß eine einmal bewiesene Aussage A in einem späteren Stadium der Diskussion, wenn A erneut in Frage steht, nicht einfach zitiert werden darf. Denn im allgemeinen werden im Laufe des Dialogs andere mit A nicht kommensurable Aussagen bewiesen worden sein, weshalb die Aussage A dann nicht mehr zur Verfügung steht. Wir wollen daher sagen, daß die Aussagen A, B, C, \dots , die die Eigenschaften eines quantenphysikalischen Systems beschreiben, nur „beschränkt verfügbar“ sind. Die Beschränkung der Verfügbarkeit besteht darin, daß eine Aussage nur dann in einer Diskussion verfügbar ist, wenn zwischen dem ersten Beweis und dem Zitat nur mit A kommensurable Aussagen bewiesen worden sind.

Die beschränkte Verfügbarkeit ist also eine protologische Eigenschaft, die allen quantenphysikalischen Aussagen zukommt und eine Einschränkung der früher diskutierten unbeschränkten Verfügbarkeit darstellt. Im Rahmen des dialogischen Beweisverfahrens für logische Sätze zeigt sich dann, daß auf Grund dieser Eigenschaft z. B. der Satz $A \rightarrow (B \rightarrow A)$ nicht mehr bewiesen werden kann. Ebenso wie in Kap. II.4 folgt dann daraus, daß für beschränkt verfügbare Aussagen nur die effektive Quantenlogik, nicht aber die effektive Logik als gültig bzw. evident nachgewiesen werden kann. Die Erweiterung zur vollständigen Quantenlogik kann hier wieder, wie schon in Kap. II.4, ohne Schwierigkeit durch Diskussion der expliziten Gestalt der quantenlogischen Aussagen durchgeführt werden. Wir wollen hierauf nicht näher eingehen.

II.6 Diskussion

Die Untersuchungen in Kap. II.3 und II.4 haben gezeigt, daß für Aussagen, die die Ergebnisse von Messungen irgendwelcher incommensurabler Größen beschreiben, nicht die Logik, sondern nur die Quantenlogik gültig ist. Dadurch, daß wir den Begriff der Logik und der Quantenlogik durch die Begriffe Kalkül und Quasikalkül bzw. durch die protologischen Eigenschaften der beschränkten bzw. unbeschränkten Verfügbarkeit definiert haben, konnte der eingangs erwähnte formale Zirkel in der Frage nach der Gültigkeit der Logik vermieden werden. Auch die Frage, wieso die hier gewonnenen Ergebnisse nicht im Gegensatz zu einer aprioristischen Auffassung der Logik stehen, konnte von diesem Gesichtspunkt her geklärt werden: Innerhalb eines Kalküls bzw. Quasikalküls können die Gesetze der Logik als evident betrachtet werden, was wir oben durch den formalen Begriff der generellen Eliminierbarkeit ausgedrückt haben.

Entsprechend dazu konnte die Evidenz von Logik und Quantenlogik im Rahmen des dialogischen Begründungsverfahrens gezeigt werden.

Die Notwendigkeit, für Aussagen der quantentheoretisch-physikalischen Wirklichkeit die Logik durch die Quantenlogik zu ersetzen, beruht also darauf, daß diese Wirklichkeit gewisse allgemeine Eigenschaften — die Kalkülisierbarkeit bzw. die unbeschränkte Verfügbarkeit von Aussagen — nicht besitzt. Es wurde jedoch bereits in Kap. II.1 darauf hingewiesen, daß es sich hierbei nicht einfach um einen empirischen Tatbestand handelt.

Zwar sahen wir oben, daß man die Quantenlogik einführen muß, weil man sich nicht auf Aussagen über das unbeobachtete System beschränkt, also auf Aussagen, die im Formalismus der Quantentheorie ableitbar sind, sondern weil man sich für die einzelne Meßaussage interessiert und nach deren Logik fragt. Andererseits gehören aber Experimente ihrem Wesen nach dem Bereich der klassischen

Physik an und unterliegen als klassische Phänomene betrachtet natürlich der klassischen Logik. Hierfür ist keine Quantenlogik erforderlich. Die Notwendigkeit, Quantenlogik einzuführen, war oben (II.5) an dem Beispiel $C \rightarrow (A \rightarrow C)$ an Hand einer Orts- bzw. Impulsmessung C bzw. A erläutert worden. Dabei zeigte sich, daß erst dann, wenn man die klassischen Experimente als Messungen verschiedener, möglicherweise auch inkommensurabler Eigenschaften eines physikalischen Systems auffaßt, die Messungen also in der Weise interpretiert, daß man sie auf ein selbst nicht näher beobachtbares Objekt bezieht und als Aussagen über dieses Objekt auffaßt, die klassische Logik durch die Quantenlogik ersetzt werden muß.

Der Übergang von der klassischen Logik zur Quantenlogik erweist sich also erst durch das Zusammenwirken zweier Faktoren als notwendig: einmal wegen der Tatsache, daß die experimentellen Ergebnisse nicht im Formalismus selbst ableitbar sind. Dies allein würde jedoch nicht genügen. Wegen ihres klassischen Charakters könnte man diese Experimente — als klassische Phänomene betrachtet — noch im Rahmen der klassischen Logik beschreiben. Erst die Tatsache, daß man diese Experimente als Aussagen über ein bestimmtes quantenmechanisches Objekt auffaßt, sie also im Rahmen der statistischen Deutung der Quantentheorie interpretiert, erzwingt den Übergang von der Logik zur Quantenlogik.

Dieser Bezug der Experimente auf ein physikalisches Objekt ist aber insofern unvermeidlich, als erst durch ihn jene Situation geschaffen wird, die die Physik ihrem Konzept nach immer herzustellen sich bemüht: Die Beschreibung eines physikalischen Objektes durch die an diesem Objekt gewonnenen experimentellen Resultate, die ihrerseits erst durch diesen Schritt eine sinnvolle Interpretation erhalten.

III. Die formale Struktur von Logik und Quantenlogik

III.1 Die Logik der kommensurablen Eigenschaften

Es ist oft von Interesse, die in Kap. II untersuchten Logikkalküle von einem verbandstheoretischen Gesichtspunkt aus zu untersuchen, um die aus den verschiedenen Regeln sich ergebende algebraische Struktur besser charakterisieren zu können.

Der durch (II.28) charakterisierte Kalkül der effektiven Logik bildet bezüglich der Relation \rightarrow eine Halbordnung (II.28, 1, 2), die zu je zwei Elementen A und B wegen (II.28, 3, 4, 5) eine untere Grenze $A \wedge B$ besitzt (Halbverband) und wegen (II.28, 6, 7, 8) eine obere Grenze $A \vee B$, so daß die untersuchte Struktur ein Verband ist. Wie stets in Verbänden gelten daher die zueinander dualen Beziehungen

$$(A \wedge B) \vee (A \wedge C) \rightarrow A \wedge (B \vee C), \quad (\text{III.1})$$

$$A \vee (B \wedge C) \rightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C). \quad (\text{III.2})$$

Vegen (II.28, 9, 10) ist der betrachtete Verband relativ-pseudokomplementär, in je zwei Elementen A und B existiert also ein Element $B \neg A$, das zu B relative Pseudokomplement von A . Es existiert daher zunächst ein Einzelement $\top \not\Rightarrow A \neg A$. Da relativ-pseudokomplementäre Verbände weiterhin distributiv

sind, gelten also auch die Umkehrungen von (II.32, 33). Auf den Beweis dieses Satzes soll hier nicht eingegangen werden.

Die für (II.28, 11, 12) wichtige Annahme, daß eine A -Aussage existiert, bedeutet, daß der betreffende Verband ein Nullelement besitzt. Da der Verband weiter relativ-pseudokomplementär ist, existiert also insbesondere das Pseudokomplement $\neg A$ zu A , das wir oben als Negation bezeichnet haben. Die Beziehungen (II.28, 11, 12) gelten hier wie stets für Pseudokomplemente.

Darüber hinaus gilt hier aber auch noch (II.30), weshalb $\neg A$ sogar ein Komplement ist. Da in distributiven Verbänden die Komplementbildung weiterhin eindeutig ist, ist $\neg A$ also das einzige Komplement zu A .

Wir haben daher einen relativ-pseudokomplementären Verband mit 0- und 1-Element, der außerdem (II.30) erfüllt, also einen komplementären, distributiven Verband, oder auch eine Boolesche Algebra. Die Logik der kommensurablen Eigenschaften ist daher vollkommen äquivalent zur klassischen oder fiktiven Logik.

III.2 Die effektive Quantenlogik

Der durch (II.54, 1–11) charakterisierte Kalkül der effektiven Quantenlogik ist wegen (II.32, 33) eine Halbordnung, in der es zu je zwei Elementen A und B wegen (II.37–39) eine untere Grenze $A \wedge B$ und wegen (II.41–43) eine obere Grenze $(A \vee B)$ gibt. Die Aussagen der effektiven Quantenlogik bilden daher einen Verband.

Da die Beziehung (II.46) jetzt nicht mehr allgemein gilt, wird es zu zwei vorgegebenen Aussagen A und B ein relatives Pseudokomplement $B \neg A$ nur in Ausnahmefällen geben. Dagegen kann ein Pseudokomplement $\neg A$ für jede Aussage A angegeben werden, welches den Beziehungen (II.51–53) genügt.

Die effektive Quantenlogik bildet daher einen pseudokomplementären Verband mit Null- und Eins-Element.

Es gelten daher wie stets in Verbänden die Sätze:

$$A \vee (B \wedge C) \rightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C), \quad (\text{III.3})$$

$$(A \wedge B) \vee (A \wedge C) \rightarrow A \wedge (B \vee C), \quad (\text{III.4})$$

wobei (III.4) die zu (III.3) duale Aussage ist. Gelten nun außerdem noch die Umkehrungen von (III.3, 4), also

$$(A \vee B) \wedge (A \vee C) \rightarrow A \vee (B \wedge C), \quad (\text{III.5})$$

$$A \wedge (B \vee C) \rightarrow A \wedge B \vee (A \wedge C), \quad (\text{III.6})$$

so bezeichnet man den Verband als distributiv. Da (III.5, 6) wieder dual zueinander sind, wird es im folgenden genügen, jeweils nur einen dieser beiden Sätze zu diskutieren. Die Distributivgesetze (III.5, 6) gelten, wie weiter unten gezeigt wird, in der Quantenlogik nicht allgemein.

Es wird aber trotzdem möglich sein, einen Spezialfall anzugeben, in dem das Distributivgesetz auch noch weiterhin gültig ist.

Die Distributivität eines Verbandes lässt sich aus den beiden zusätzlichen Regeln

$$A \wedge A \rightarrow B \Leftrightarrow B \quad (\text{III.7})$$

$$A \wedge C \rightarrow B \Rightarrow C \Leftrightarrow A \rightarrow B \quad (\text{III.8})$$

beweisen. Da jedoch (III.8) jetzt nur unter der Voraussetzung gilt, daß A und C kommensurabel sind, so wird auch die Gültigkeit der Distributivgesetze gewissen Einschränkungen unterworfen sein. Um dies zu sehen, muß man explizit zeigen, wie aus (III.7, 8) die Distributivität folgt. Jedesmal wenn (III.8) in dem Beweis benötigt wird, wird man daher zusätzlich annehmen müssen, daß A und C kommensurabel sind. Durch Zusammenfassung all dieser zusätzlichen Bedingungen gewinnt man dann die Voraussetzungen, unter denen die Distributivität gilt. Man erhält so den folgenden Satz¹⁾: Ist A mit B und A mit C kommensurabel, so gilt das Distributivgesetz.

$$A \wedge (B \vee C) \rightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C).$$

III.3 Die vollständige Quantenlogik — die Theorie von BIRKHOFF und v. NEUMANN

Um die vollständige Logik kommensurabler bzw. inkommensurabler Aussagen herzuleiten, wurde in Kap. II die explizite Gestalt der untersuchten Aussagen in Betracht gezogen. Bei kommensurablen Aussagen zeigte sich dabei, daß die über die effektive Logik hinausgehenden logischen Regeln auf Grund der Eigenschaften von Projektionsoperatoren hergeleitet werden konnten. Bei inkommensurablen Aussagen versagte dieses einfache Hilfsmittel, jedoch ließen sich auch hier noch den Aussagen abgeschlossene Linearmannigfaltigkeiten des HILBERT-Raums zuordnen, aus deren Algebra dann die Quantenlogik hergeleitet werden konnte.

Dabei wurde gezeigt, daß die logisch-operativen Relation \rightarrow der Relation \subseteq zwischen abgeschlossenen Linearmannigfaltigkeiten entspricht, und daß weiterhin den logisch-operativ definierten Aussagen $A \wedge B$ und $A \vee B$ eindeutig die Mengen $M_A \cap M_B$ und $M_A \cup M_B$ zugeordnet sind. Es besitzen deshalb alle Gesetze des Verbandes der abgeschlossenen Linearmannigfaltigkeiten auch für den Verband allgemein inkommensurable Eigenschaften Gültigkeit, woraus sich die Bedeutung dieses Verbandes für die vorliegenden Untersuchungen erklärt.

Eine systematische Darstellung der Theorie der abgeschlossenen Linearmannigfaltigkeiten des HILBERT-Raums unter Benutzung verbandstheoretischer Begriffe wurde 1936 von BIRKHOFF und v. NEUMANN [2] angegeben. Wir wollen hier nur die wichtigsten Ergebnisse dieser Theorie darstellen und verweisen wegen aller Einzelheiten auf die Originalarbeit. In bezug auf die Relation \subseteq bilden die Unterräume M_A , M_B , M_C eine Halbordnung, das heißt

$$M_A \subseteq M_A, \quad (\text{III.9})$$

$$M_A \subseteq M_B, \quad M_B \subseteq M_C \Rightarrow M_A \subseteq M_C \quad (\text{III.10})$$

In bezug auf den Durchschnitt $M_A \cap M_B$ der beiden Mengen einen Halbverband

$$M_A \cap M_B \subseteq M_A, \quad (\text{III.11})$$

$$M_A \cap M_B \subseteq M_B, \quad (\text{III.12})$$

$$M_C \subseteq M_A, \quad M_C \subseteq M_B \Rightarrow M_C \subseteq M_A \cap M_B \quad (\text{III.13})$$

¹⁾ Auf den Beweis soll hier nicht eingegangen werden. Vgl. [8].

und in bezug auf den von M_A und M_B aufgespannten Teilraum $M_A \cup M_B$ einen Verband

$$M_A \subseteq M_A \cup M_B, \quad (\text{III.14})$$

$$M_B \subseteq M_A \cup M_B, \quad (\text{III.15})$$

$$M_A \subseteq M_C, M_B \subseteq M_C \Rightarrow M_A \cup M_B \subseteq M_C. \quad (\text{III.16})$$

Definiert man weiter die Komplementmenge $\neg M_A$ durch den auf M_A total-senkrechten Teilraum, also

$$\neg M_A = H - M_A,$$

so gelten bezüglich dieser Komplementmenge $\neg M_A$ die Beziehungen

$$M_A \cup \neg M_A = H, \quad (\text{III.17})$$

$$M_A \cap \neg M_A = 0, \quad (\text{III.18})$$

wobei 0 die leere Menge bedeutet. Die Untermengen bilden daher einen komplementären Verband. Da durch die Abbildung

$$M_A \rightsquigarrow \neg M_A$$

weiter ein dualer Automorphismus mit der Periode 2 gestiftet wird, derart daß

$$\neg \neg M_A = M_A \quad (\text{III.19})$$

gilt, ist der Verband sogar orthokomplementär, d. h. daß durch $\neg M_A$ definierte Komplement ist eindeutig festgelegt.

Die Distributivität

$$(M_A \cup M_B) \cap (M_A \cup M_C) \subseteq M_A \cup (M_B \cap M_C) \quad (\text{III.20})$$

läßt sich für den Verband der Teilmengen nicht beweisen, sondern nur die schwächere Bedingung der Modularität. Das heißt es gilt Satz:

Ist eine der Bedingungen $M_A \subseteq M_B$ oder $M_A \subseteq M_C$ erfüllt, so gilt

$$(M_A \cup M_B) \cap (M_A \cup M_C) \subseteq M_A \cup (M_B \cap M_C);$$

der Beweis ist einfach: Ist nämlich $|f\rangle \subseteq (M_A \cup M_B) \cap (M_A \cup M_C)$

so
also

$$|f\rangle \subseteq M_A \cup M_B \quad \text{und} \quad |f\rangle \subseteq M_A \cup M_C$$

wobei

$$|f\rangle = |f_A\rangle + |f_B\rangle = |f_A'\rangle + |f_C\rangle$$

und weiter

$$|f_A\rangle, |f_A'\rangle \subseteq M_A, |f_B\rangle \subseteq M_B, |f_C\rangle \subseteq M_C$$

und wenn

$$|f_B\rangle = |f_A'\rangle - |f_A\rangle + |f_C\rangle$$

so ist

$$M_A \subseteq M_C$$

$$|f_B\rangle \subseteq M_C$$

also

$$\lceil \tilde{f}_B \rangle \subseteq M_C \cap M_B$$

und daher

$$|f\rangle \subseteq M_A \cup (M_B \cap M_C)$$

wie behauptet.

Es muß jedoch bemerkt werden, daß dieser Beweis und damit dieser Satz nur richtig ist, wenn man sich auf endlich viele Dimensionen des HILBERT-Raums beschränkt, wie leicht durch ein Gegenbeispiel gezeigt werden kann [2].

III.4 Besondere Eigenschaften der Quantenlogik

a) Die Implikation

Ein besonders bemerkenswerter Unterschied zwischen Logik und Quantenlogik ist wie oben gezeigt wurde, daß sich in der Quantenlogik keine Implikation mehr definieren läßt.

Für kommensurable Eigenschaften konnte mit Hilfe der Beziehungen:

$$A \wedge A \rightarrow B \Leftrightarrow B \quad (\text{III.21})$$

$$A \vee C \rightarrow B \Rightarrow C \Leftrightarrow A \rightarrow B \quad (\text{III.22})$$

eine Implikationsaussage

$$I(A, B) \equiv B \neg A \quad (\text{III.23})$$

definiert werden, für die wegen (III.21) und (III.22) die Relationen

$$A \wedge I(A, B) \rightarrow B, \quad (\text{III.24})$$

$$A \wedge C \rightarrow B \Rightarrow C \rightarrow I(A, B) \quad (\text{III.25})$$

gelten. Im Sinne der Verbandstheorie ist $I(A, B)$ daß zu B relative Pseudokomplement von A , oder auch das größte Verbandselement C , welches die Beziehung $A \wedge C \rightarrow B$ erfüllt.

Aus (III.24) und (III.25) beweist man weiter, wenn man dort C zu V spezialisiert, wobei V , „Das Wahre“ durch $V \Leftrightarrow X \neg X$ definiert werden kann, daß

$$V \rightarrow I(A, B) \Leftrightarrow A \rightarrow B \quad (\text{III.26})$$

die Relation $A \rightarrow B$ gilt also genau dann, wenn $I(A, B)$ eine wahre Aussage ist. Auf Grund der expliziten Gestalt der Aussagen, also im Rahmen der fiktiven Logik, läßt sich leicht eine Beziehung zwischen der Implikation und der Disjunktion herleiten. Es ist nämlich

$$B \neg A \Leftrightarrow \neg A \vee B \quad (\text{III.27})$$

da

$$P_{B \neg A} = 1 - P_A + P_A P_B = P_{\neg A} + P_B - P_{\neg A} P_B = P_{\neg A \vee B}$$

st.

In der Quantenlogik ist (III.22) nicht mehr allgemeingültig, weshalb es auch nicht mehr möglich ist, ein Implikationsaussage $I(A, B)$ zu definieren, welche III.24 und III.25 befriedigt. Im Sinne der Verbandstheorie heißt das, daß ein

relatives Pseudokomplement hier im allgemeinen nicht existiert, oder das diejenigen Verbandselemente C welche $A \wedge C \rightarrow B$ befriedigen, keine obere Grenze besitzen.

Trotzdem kann man, wie KUNSEMÜLLER gezeigt hat [15], eine Aussage $K(A, B)$ definieren, welche zwar nicht mehr die Bedingungen (III.24) und (III.25) aber die schwächere Beziehung (III.26) befriedigt, und daher wohl mit Recht als eine verallgemeinerte Implikationsaussage betrachtet werden kann.

Wie nämlich KUNSEMÜLLER gezeigt hat, erfüllt die Aussage

$$K(A, B) \equiv \neg A \vee (A \wedge B) \quad (\text{III.28})$$

in einem modularen, orthokomplementären Verband, das heißt also, im Rahmen der vollständigen Quantenlogik, die sich auf endlich viele Aussagen beschränkt — die Bedingung

$$A \rightarrow B \Leftrightarrow V \rightarrow \neg A \vee (A \wedge B). \quad (\text{III.29})$$

Man sieht weiter, daß $K(A, B)$ in der Tat eine sinnvolle Verallgemeinerung der Implikationsaussage der klassischen Logik

$$I(A, B) \equiv \neg A \vee B \quad (\text{III.30})$$

ist, da in distributiven Verbänden

$$K(A, B) \Leftrightarrow \neg A \vee B \quad (\text{III.31})$$

gilt, d. h. die beiden Aussagen ineinander übergehen.

b) Negation und Komplement

Die Eigenschaften A, B, C bilden, wie oben schon bemerkt, bezüglich der Relationen \wedge und \vee einen Verband. Weiterhin sahen wir, daß stets ein Eins-Element $V \leq A \neg A$ sowie ein Null-Element existiert.

Ein solcher Verband heißt weiter komplementär, wenn es zu jedem A ein A' (das Komplement zu A) gibt, mit den Eigenschaften

$$A \wedge A' \leftrightarrow A \quad V \rightarrow A \vee A' \quad (\text{III.32})$$

Wie in Kap. II.4 an Hand der Negation gezeigt wurde, gibt es sicher ein Komplement A' , nämlich $A' = \neg A$. Daher ist der Verband der Aussagen komplementär. Es ist jedoch keineswegs klar, ob $\neg A$ das einzige Komplement zu A ist, oder ob noch weitere Komplemente existieren.

Die Eindeutigkeit der Komplementbildung würde aus der Distributivität (III.5.6) folgen. Diese kann jedoch, wie oben gezeigt, nicht allgemein bewiesen werden, sondern nur die schwächere Bedingung der Modularität, so daß im allgemeinen mehrere Komplemente existieren werden. Die hier untersuchten Verbände weisen aber darüber hinaus noch einige Besonderheiten auf, die es dennoch gestatten, ein eindeutiges Komplement zu definieren.

Man bezeichnet einen modularen Verband als orthokomplementär, wenn er einen dualen Automorphismus $A \rightsquigarrow A'$ gestattet, mit den Eigenschaften:

$$(A')' \leftrightarrow A, \quad (\text{III.33})$$

$$A \wedge A' \leftrightarrow A \quad V \leftrightarrow A \vee A'. \quad (\text{III.34})$$

Das durch einen solchen Automorphismus definierte Komplement, das Orthokomplement, ist dann eindeutig definiert.

Die Untersuchungen in Kap. III.3 haben gezeigt, daß der Verband der incommensurablen Aussagen zwar nicht mehr relativ-pseudokomplementär ist, (woraus die Distributivität folgen würde), daß aber trotzdem zu jedem A ein Pseudokomplement $\neg\neg A$ existiert. Für dieses Pseudokomplement gelten aber über die stets für Pseudokomplemente gültige Relation $A \wedge \neg\neg A \rightarrow A$ hinaus, wie bereits bei der Diskussion der Negation gezeigt wurde, die Beziehungen III.33, 34, wenn man die explizite Gestalt der quantenlogischen Aussagen mit in Betracht zieht. Das besagt aber, daß die Abbildung $A \rightsquigarrow (\neg\neg A)$ ein Automorphismus im oben diskutierten Sinn darstellt. Das Pseudokomplement ist daher nicht nur ein Komplement, sondern wegen der Stabilität aller Aussagen sogar ein Orthokomplement. Die quantenlogischen Aussagen bilden daher einen orthokomplementären, modularen Verband. Die als Pseudokomplement definierte Negation $\neg A$ einer Aussage A befriedigt (III.33, 34) und ist daher ein Orthokomplement.

Zu einer beliebigen Aussage A wird es daher im allgemeinen mehrere Aussagen A, A', \dots geben, die den Beziehungen (III.34) genügen, wenn die Projektionsoperatoren P_A und $P_{A'}$ nicht vertauschbar miteinander sind. Diese Aussagen A, A', \dots sind dann die Komplemente zu A . Für die eindeutig definierte Negation $\neg A$ jedoch gilt außer (III.34) auch noch (III.33).

Das an der Theorie der incommensurablen Eigenschaften Neuartige ist daher, daß man aus dem Vorliegen der Beziehung (III.34) im allgemeinen nicht schließen darf, daß A' die Negation zu A sei, wie dies bei kommensurablen Eigenschaften stets gilt.

IV. Über einen quantenlogischen Modalkalkül

IV.1 Sprache und Metasprache

Die Logik beliebiger, im allgemeinen nicht kommensurabler Eigenschaften eines physikalischen Systems ist in Kap. II und III als eine Objektsprache entwickelt worden. Es hat sich dabei herausgestellt, daß man auf Grund der allgemeingültigen Regeln der Quantenlogik für ein vorgegebenes System $|f\rangle$ und eine beliebige Eigenschaft A im allgemeinen weder A noch $\neg A$ beweisen kann. Da andererseits die Eigenschaften A und $\neg A$ sehr wohl in einem Meßprozeß als vorliegend sich erweisen können (allerdings dann nicht in dem Zustand $|f\rangle$), liegt es nahe, diesen Sachverhalt mit Hilfe der Modalitäten zu interpretieren: Die Eigenschaften A und $\neg A$ sind „möglich“ in $|f\rangle$, „Notwendig“ würde man eine Eigenschaft A dagegen nennen, wenn man mit Sicherheit sagen kann, daß ein Meßprozeß das Vorliegen von A ergibt.

Eine solche Ausdrucksweise würde am ehesten dem Sprachgebrauch innerhalb der Physik entsprechen (vgl. dazu auch v. WEIZSÄCKER [10]). Das liegt daran, daß dort die Meßergebnisse als Objekte behandelt werden, und jede physikalische Interpretation ein Sprechen über diese Objekte ist, das heißt es wird gar nicht der Kalkül der Objekte betrachtet, sondern es wird ihre Meßbarkeit, ihre Möglichkeit und ihre Unmöglichkeit diskutiert. In der Sprache der Logik heißt das, daß nicht die Objektlogik und die in ihr gültigen Regeln diskutiert werden, sondern daß in einer Metasprache das Ableiten, das heißt hier also die Meßbarkeit, selbst diskutiert wird. Wir werden im folgenden zeigen, daß eine solche Metasprache sich sehr durchsichtig formulieren läßt, wenn man von den oben erwähnten Modalitäten in geeigneter Weise Gebrauch macht.

Bevor wir mit der Formulierung einer solchen Metasprache beginnen, ist es aber nützlich, sich zu vergegenwärtigen, wie sich die Modalitäten in der operativen Logik der Kalküle einführen lassen [6]. Wir gehen dazu von einem Kalkül K aus, der durch die Zeichen $\rightarrow, \wedge, \vee, \neg$ erweitert werden möge. Die für die Fragestellung der Modallogik besondere Situation liegt nur dann vor, wenn man über den Kalkül K nicht alles weiß, sondern wenn nur eine endliche Klasse von Formeln aus K bekannt ist. Die Konjunktion W all dieser bekannten Formeln möge das „Wissen“ heißen. Wir wollen eine Aussage A notwendig relativ zu dem Wissen W nennen, wenn A aus W ableitbar ist, und möglich (relativ zu W), wenn $\neg A$ nicht aus W ableitbar ist. Wir definieren also¹⁾

$$\triangle_W A \Leftrightarrow W \vdash A, \quad (\text{IV.1})$$

$$\square_W A \Leftrightarrow W \not\vdash \neg A. \quad (\text{IV.2})$$

Der Kalkül der Metaregeln für \triangle_W und \square_W ist damit zurückgeführt auf den Kalkül der Metaaussagen $A \vdash B$. In der Modallogik untersucht man nun diejenigen Regeln dieses Metakalküls, die unabhängig von der speziellen Wahl von K und W gültig sind. Die Ableitbarkeit irgendwelcher Metaaussagen $A \vdash B$ ist aber durch die effektive Logik der Kalküle definiert. Das bedeutet, daß man die Regeln des Modalkalküls gewinnt auf Grund der allgemeinen Einsicht, die man in das Ableiten von Aussagen in Kalkülen in der operativen Logik gewonnen hat. Denn unabhängig davon, ob man K kennt oder nicht, und wie groß K im einzelnen beschaffen ist, weiß man doch, daß K ein Kalkül ist, und somit die in der effektiven Logik gültigen Gesetze über die Ableitbarkeit von Aussagen auch für K gültig sind.

Eine in vieler Hinsicht ähnliche Situation wie in der Modallogik liegt nun auch in der Metalogik quantenmechanischer Aussagen vor. Eine bestimmte Eigenschaft eines physikalischen Systems S wird allerdings nicht in einem Kalkül abgeleitet, sondern an dem betreffenden System gemessen. Das uns jeweils maximal zur Verfügung stehende Wissen W über das System S ist der Zustand $|f\rangle$, in dem sich S gerade befindet. Da es weiterhin nicht möglich ist, aus der Kenntnis von $|f\rangle$ den Meßwert einer beliebigen Observablen vorauszusagen, das Wissen W also niemals vollständig ist, liegt es nahe, auch hier von den Modalitäten Gebrauch zu machen: Eine Eigenschaft A möge notwendig relativ zu W heißen, wenn A mit Sicherheit bei einer Messung an $|f\rangle$ als zutreffend sich erweist, und möglich, wenn $\neg A$ nicht mit Sicherheit für einen Meßprozeß vorausgesagt werden kann. Statt dessen wollen wir auch sagen, daß A aus W hergeleitet werden kann bzw. $\neg A$ nicht aus W abgeleitet werden kann, um uns an den in der Quantenlogik eingeführten Sprachgebrauch anzulehnen. Wir definieren also:

$$\triangle_W A \Leftrightarrow W \vdash A, \quad (\text{IV.3})$$

$$\square_W A \Leftrightarrow W \not\vdash \neg A. \quad (\text{IV.4})$$

Die Modalitäten sind damit wiederum auf Metaaussagen $A \vdash B$ zurückgeführt. Als „quantenlogischen Modalkalkül“ wollen wir jetzt den Metakalkül all der Regeln bezeichnen, die unabhängig von der speziellen Wahl von W sind.

¹⁾ $A \vdash B$ soll heißen, daß B aus A ableitbar ist.

Die Regeln über die Ableitbarkeit von Aussagen konnten in der klassischen Modallogik gewonnen werden auf Grund der Kenntnisse über das Ableiten in Kalkülen. Hier dagegen ist kein Kalkül gegeben, sondern ein quantenmechanisches System, bzw. ein Wissen W über dieses System. Die Ableitbarkeit der Metaaussagen $A \vdash B$ ist daher nicht mehr durch die effektive Logik der Kalküle definiert, sondern durch die effektive Quantenlogik, bzw. die hier immer gültige Erweiterung zur Quantenlogik. Die Quantenlogik spielt hier also für den quantenlogischen Modalkalkül dieselbe Rolle, wie die Logik der Kalküle für die klassische Modallogik.

Damit ist die Methode für den Aufbau eines quantenlogischen Modalkalküls klar. Ausgehend von den Definitionen (IV.3, 4) und den aus der Quantenlogik folgenden Sätzen über die Metaaussagen $A \vdash B$ werden wir einen Kalkül für Δ_W und ∇_W aufstellen. Durch diesen Kalkül werden dann die Zeichen Δ_W und ∇_W charakterisiert sein, so daß wir nachträglich wieder auf die Definitionen (IV.3, 4) verziichten können.

Im Anschluß an den Aufbau dieses Kalküls sollen einige besondere Eigenschaften dieses Formalismus genauer diskutiert werden. Während der klassische Modalkalkül nur dann eine Bedeutung hat, wenn man zufällig den untersuchten Kalkül nicht genügend kennt, ist der quantenlogische Modalkalkül von viel grundätzlicherer Bedeutung. Die Tatsache, daß man niemals mehr über ein physikalisches System wissen kann als seinen Zustand $|f\rangle$, und daß dieses Wissen immer unvollständig ist, hat zur Folge, daß man auch hypothetisch nicht auf die Modalitäten verzichten kann. Wir werden diese Probleme an Hand der Begriffe der Wirklichkeit, Objektivität und Koexistenz weiter unten genauer diskutieren. Hierbei werden die wesentlichen Unterschiede zwischen dem klassischen und dem quantenlogischen Modalkalkül sichtbar werden..

Im Anschluß an frühere Untersuchungen [18–23] ist noch die Frage von Interesse, inwiefern sich der quantenlogische Modalkalkül als eine mehrwertige Logik auffassen läßt. Wir werden zeigen, daß sich zwar Wahrheitswerte definieren lassen, in bezug auf welche der quantenlogische Modalkalkül immer 3 Wahrheitswerte besitzt, während man bei dem entsprechenden klassischen Problem wenigstens im Prinzip die Anzahl der Wahrheitswerte auf 2 reduzieren kann. Jedoch genügt dies nicht, um zu behaupten, daß der quantenlogische Modalkalkül eine dreiwertige Logik im konventionellen Sinne [18–20] ist. Wir werden sehen, daß das auch nicht der Fall ist.

IV.2 Der Aufbau des Modalkalküls

Wir gehen aus von einem physikalischen System S und dem Kalkül der Aussagen A, B, C über dieses System, der durch die logischen Partikeln $\rightarrow, \wedge, \vee, \neg$ erweitert sein möge. Über das System S besitzen wir ein Wissen W , was maximal durch den Zustand $|f\rangle$ des Systems, bzw. durch den auf $|f\rangle$ projizierenden Projektionsoperator $P_W = |f\rangle\langle f|$ gegeben ist. Im allgemeinen ist W die Konjunktion aller über S bekannten Eigenschaften A_i . Relativ zu W definieren wir dann die Modi Δ_W (A ist notwendig relativ zu W) und $\nabla_W A$ (A ist möglich relativ zu W) durch (IV.3, 4). Die Ableitbarkeit der Metaaussagen $A \vdash B$ ist durch die effektive Quantenlogik definiert. Benutzen wir $\Rightarrow, \wedge, \vee, \neg$ als logische Partikeln, \bigwedge_x und \bigvee_y als Quantoren im Metakalkül und fügen wir noch \bigvee (das

Wahre) und \wedge (das Falsche) hinzu, so gelten die Regeln:

- (1) $A \vdash \vee$
- (2) $\wedge \vdash B$
- (3) $A \vdash A$
- (4) $A_1 \vdash A_2 \wedge A_2 \vdash A_3 \Rightarrow A_1 \vdash A_3$
- (5) $A \wedge A \rightarrow B \vdash B$
- (6) $A \vdash B_1 \wedge A \vdash B_2 \Leftrightarrow A \vdash B_1 \wedge B_2$
- (7) $A_1 \vdash B \wedge A_2 + B \Leftrightarrow A_1 \vee A_2 \vdash B$
- (8) $A \vdash \neg B \Rightarrow A \wedge B \vdash \wedge$
- (9) $\bigwedge_x A \vdash B(x) \Leftrightarrow A \vdash \bigwedge_x B(x)$
- (10) $\bigwedge_x A(x) \vdash B \Leftrightarrow \bigvee_x A(x) \vdash B$

(IV.5)

Bei (IV.9) kommt x nicht frei in A vor und bei (IV.10) nicht frei in B . Der Unterschied dieses quantenlogischen Metakalküls zum klassischen Metakalkül besteht darin, daß die Formel

$$A \wedge B \vdash \Rightarrow C \quad A \vdash B \rightarrow C \quad (\text{IV.6})$$

nur gilt, wenn A und B kommensurabel sind, und demgemäß auch die Umkehrung von (IV.5(8)) nur in diesem Spezialfall gültig ist. Die Negation einer Metaussage \mathfrak{A} definieren wir wieder durch $\mathfrak{A} \Rightarrow \wedge$. Dann ist $A \nvdash B$ im (4) als Abkürzung von $\neg A \vdash B$ aufzufassen.

Die Erweiterung der effektiven Quantenlogik zur Quantenlogik erfolgt hier durch Hinzunahme des tertium non datur sowohl in der Objektsprache

$$\forall \vdash A \vee \neg A \quad (\text{IV.7})$$

als auch in der Metasprache

$$\mathfrak{A}_\forall = \mathfrak{A}. \quad (\text{IV.8})$$

Die Gültigkeit von (IV.7) und (IV.8) läßt sich leicht unter Verwendung des Kalküls der Projektionsoperatoren beweisen.

Betrachten wir jedoch zunächst den effektiven quantenlogischen Modalkalkül, der sich ohne Benutzung von (7, 8) ergibt. Es gelten dann die Regeln:

- (1) $\neg = \Delta_W A$
- (2) $A \vdash B \wedge \Delta_W A \Rightarrow \Delta_W B$
- (3) $\Delta_W A \wedge \Delta_W B \Rightarrow \Delta_W (A \wedge B)$
- (4) $\Delta_W V$
- (5) $\neg_W A \Leftrightarrow \Delta_W \neg A$
- (6) $\bigwedge_x \Delta_W A(x) \Rightarrow \Delta_W \bigwedge_x A(x)$

(IV.9)

(1) besagt, daß W keine Δ -Aussage ist. (2) und (3) folgen direkt aus (IV.3, 4). (5) zeigt, daß ∇_W durch Δ_W definierbar ist.

Der durch (IV.5) und (IV.9) gebildete Kalkül möge als effektiver quantenlogischer Modalkalkül bezeichnet werden. Die Modi Δ_W und ∇_W sind jetzt durch (IV.5, 9) charakterisiert. Ist nämlich W eine endliche Konjunktion von Aussagen A_i so gilt wegen (IV.9; 2–3)

$$W \vdash B \wedge \bigwedge \Delta A(x) \Rightarrow \Delta B. \quad (\text{IV.10})$$

Betrachtet man nun in einem etwas verallgemeinerten Sinne die unendliche Konjunktion W aller Aussagen A , für welche ΔA ableitbar ist, so gilt wegen (IV.10)

$$\Delta B \Leftrightarrow W \vdash B \quad (\text{IV.11})$$

und weiter wegen (IV.9; 5)

$$\nabla \vdash \Leftrightarrow W \not\vdash \neg B \quad (\text{IV.12})$$

wodurch jetzt die Definitionen (IV.3, 4) überflüssig werden.

Wir wollen hier noch eingehen auf einige Beziehungen zwischen den Operatoren Δ_W und ∇_W und den durch Anwendung der Negation daraus entstehenden Operatoren.

Die zunächst möglich 9 Operatoren aus Δ :

$$\Delta, \Delta \neg, \Delta \neg \neg; \exists \Delta, \exists \Delta \neg, \exists \Delta \neg \neg; \exists \exists \Delta, \exists \exists \Delta \neg, \exists \exists \Delta \neg \neg$$

und die 4 Operatoren aus ∇ :

$$\dots, \nabla \neg; \exists \nabla, \exists \exists \nabla$$

(für ∇ gibt es keine weiteren, da wegen [IV.9(5)] $\nabla \neg \neg = \nabla$ und $\exists \exists \nabla = \nabla$ gilt) lassen sich durch Anwendung des tertium non datur (IV.7, 8), welches hier stets gilt, auf die 4 Modi

$$\Delta = \exists \nabla \neg \quad \exists \Delta = \nabla \neg, \quad (\text{IV.13})$$

$$\exists = \exists \Delta \neg, \quad \exists \exists = \Delta \neg$$

reduzieren. Dadurch ist jetzt Δ durch \exists definierbar geworden. Zwischen diesen 4 Modi gelten weiterhin die Relationen

$$\Delta A \Rightarrow \nabla A \quad (\text{IV.14})$$

wegen

$$\Delta A \wedge \Delta \neg A \Rightarrow \Delta(A \wedge \neg A) \Rightarrow \bot A \Rightarrow \nabla$$

nach (IV.9; 1, 3) und

$$\exists \nabla A \Rightarrow \exists \Delta A. \quad (\text{IV.15})$$

IV.3 Möglichkeit und Wirklichkeit

In der klassischen Modallogik (LORENZEN [6], BECKER [16], LEWIS-LANFORD [17]) ist es üblich, noch den Fall zu betrachten, in dem die Modi sich sogar auf zwei reduzieren lassen. Wir wollen hierauf noch kurz eingehen, da sich an Hand dieser

Theorie die wesentlichen Unterschiede zwischen dem klassischen und dem quantenlogischen Modalkalkül besonders deutlich zeigen werden.

In der klassischen Modallogik untersucht man dazu ein Wissen W_0 (W_0 möge wieder die Konjunktion mehrerer Aussagen sein) mit $W_0 \models A$ und

$$W_0 \vdash A \vee W_0 \vdash \neg A \quad (\text{IV.16})$$

für alle Aussagen A . Ein solches Wissen, aus dem somit für jede Aussage A entweder A oder $\neg A$ hergeleitet werden kann, wollen wir ein vollkommenes Wissen nennen. Häufig wird auch W_0 als „Wirklichkeit“ bezeichnet im Gegensatz zu dem nur bruchstückhaften Wissen W , das wir von dieser Wirklichkeit haben. Bezuglich W_0 fallen die Modi Δ_{W_0} und ∇_{W_0} zusammen, das heißt es gilt

$$\Delta_{W_0} A \Leftrightarrow \nabla_{W_0} A. \quad (\text{IV.17})$$

Es ist daher angebracht, eine neue Bezeichnung einzuführen. Wir definieren

$$\Diamond_{W_0} A \doteq W_0 \vdash A$$

und sagen, A sei „wirklich“ relativ zu W_0 .

Auf Grund der angegebenen Bedeutung der Wirklichkeit W_0 ist klar, daß ein beliebiges unvollständiges Wissen W mit W_0 in der Beziehung $W_0 \vdash W$ stehen muß. Daraus ergibt sich eine Beziehung zwischen den drei Modalitäten, das sogenannte Modalgefälle:

$$\Delta_W A \Rightarrow \Diamond_{W_0} A \Rightarrow \nabla_W A. \quad (\text{IV.18})$$

Eine völlig andere Situation liegt nun in dem quantenlogischen Modalkalkül vor. Das Maximum an Wissen, das man über ein vorgelegtes System S haben kann, ist immer der Zustand $|f\rangle$ dieses Systems. Ein solches Wissen W hat aber nie die Eigenschaft, daß für alle Aussagen A

$$W \vdash A \vee W \vdash \neg A \quad (\text{IV.19})$$

gilt, sondern dies ist nur für diejenigen A richtig, die mit W kommensurabel sind. Eine Eigenschaft A , die (IV.19) gehorcht, wollen wir hier „objektiv“ in bezug auf W nennen. Für objektive Aussagen gilt dann wieder, daß die relativen Modi Δ_W und ∇_W zusammenfallen, also:

$$\Delta_W A \Leftrightarrow \nabla_W A. \quad (\text{IV.20})$$

Dagegen gilt hier eine etwas schwächere Aussage als (IV.19) auch für alle Aussagen. Ist W ein maximales Wissen, also $P_W = |f\rangle\langle f|$ so gilt

$$[P_W, P_A] = 0 \vee [P_W, P_A] \neq 0$$

und da weiterhin $[P_W, P_A] = 0$ äquivalent ist zu $\Delta_W A \vee \Delta_W \neg A$ so folgt wegen (IV.13)

$$\Delta_W A \dot{\vee} \Delta_W \neg A \dot{\vee} (\nabla_W A \wedge \nabla_W \neg A). \quad (\text{IV.21})$$

Es liegt nahe, (IV.19) als ein tertium non datur relativ zu W zu bezeichnen, da (IV.19) aussagt, daß bei Vorliegen von W entweder A oder $\neg A$ ableitbar ist. Davon streng zu unterscheiden sind die immer, auch für beliebige Aussagen,

gültigen Gesetze (IV.7, 8) die üblicherweise als tertium non datur in der Objekt- bzw. Metasprache bezeichnet werden.

Die ebenfalls für beliebige A gültige Formel (IV.21) könnte man in dieser Redeweise als eine metasprachliche Formulierung des „quartum non datur“ relativ zu W bezeichnen. Dann (IV.21) drückt aus, daß es für eine beliebige Eigenschaft A in der Quantenlogik höchstens drei Möglichkeiten gibt, daß nämlich $\Delta_W A$, $\Delta_W \neg A$ oder $\nabla_W A \wedge \nabla_W \neg A$ erfüllt ist. In diesem Sinne kann man sagen, daß in der Quantenlogik das (relative) tertium non datur (IV.19) zwar nicht mehr allgemein gilt, daß dafür aber das (relative) quartum non datur (IV.21) stets erfüllt ist. Dagegen gilt hier natürlich weiterhin für alle Aussagen der (relative) Satz vom Widerspruch. (Wegen (IV.9; 1, 3)].

$$\Delta_W A \wedge \Delta_W \neg A \Rightarrow \perp. \quad (\text{IV.22})$$

Ist für eine vorgegebene Aussage A nicht gerade $\Delta_W A$ oder $\Delta_W \neg A$ beweisbar, sind also A und W incommensurabel, so folgt aus (IV.21), daß dann

$$\nabla_W A \wedge \nabla_W \neg A \quad (\text{IV.23})$$

gilt. Dies ist der für die quantenlogische Situation am meisten charakteristische Fall. (IV.23) besagt nämlich, daß zwei im klassischen Sinne kontradiktoriale Aussagen A und $\neg A$ hier beide gleichzeitig möglich sind, wenn ein zu A incommensurables Wissen W vorliegt. Wir wollen dann sagen, daß die kontradiktoriale Eigenschaften A und $\neg A$ sich im Modus der „Koexistenz“ relativ zu W befinden (vgl. dazu v. WEIZSÄCKER [9]). Die Koexistenz ist also ebenso wie die Modi der Möglichkeit und der Notwendigkeit ein relativer Modus, so daß man schärfer vom Begriff der „relativen Koexistenz“ sprechen sollte. Es ist jedoch auf Grund der Theorie des quantenmechanischen Meßprozesses klar, daß jedes Experiment am System S , das eine Entscheidung über die Eigenschaft A zum Ziele hat, die Koexistenz zerstören muß. Es würde sich dann entweder A oder $\neg A$ ergeben, da durch den Meßprozeß der Zustand des Systems und damit auch das Wissen W in einer solchen Weise verändert wird, daß das neue Wissen mit A commensurabel ist.

Sind A und W jedoch commensurabel, so ist A eine „objektive“ Eigenschaft des Systems im obigen Sinne. Es gilt dann für A die Beziehung (IV.19), woraus weiter

$$\nabla_W A \wedge \nabla_W \neg A \Rightarrow \perp \quad (\text{IV.24})$$

folgt. (IV.24) besagt aber, daß die Koexistenz einer objektiven Eigenschaft A mit ihrem kontradiktorialen Gegenteil $\neg A$ unmöglich ist.

An Hand des in (IV.16) eingeführten Begriffes der Wirklichkeit kann man sich noch leicht klar machen, wie entscheidend sich die Hinzunahme der in dem quantenlogischen Modalkalkül nicht mehr gültigen Beziehung (IV.6) bemerkbar machen würde. Ist W ein Wissen und W_0 die Wirklichkeit, so gilt in der klassischen Modallogik, in der (IV.6) gültig ist, der Satz [6]:

$$\nabla_W A \Leftrightarrow \bigvee_{W_0} \Diamond_{W_0} W \wedge \Diamond_{W_0} \neg A \quad (\text{IV.25})$$

(IV.25) besagt, daß, wenn eine Aussage A bezüglich W möglich ist, es dann stets ein vollständiges Wissen W_0 gibt, derart, daß sowohl W relativ zu W_0 wirklich ist, als auch A relativ zu W_0 wirklich ist. Dieser Satz, der wesentlich auf der Gültigkeit

von (IV.6) beruht, gilt jedoch nicht mehr im quantenlogischen Modalkalkül. Dem entspricht der physikalische Sachverhalt, daß die Kenntnis des Zustandes $|f\rangle$ des Systems S die jeweils maximal mögliche Information darstellt, die man über S gewinnen kann, daß aber andererseits dieses Wissen nie ein vollständiges Wissen im Sinne von (IV.16) ist. Eine Wirklichkeit W_0 , wie sie für alle klassischen Modalkalküle konstruiert werden kann, existiert also in der Quantenlogik nicht. Zu jedem Wissen W gibt es Aussagen A , die nicht objektiv in bezug auf W sind, die also nach dem oben Gesagten mit ihrem kontradiktitorischen Gegenteil $\neg A$ im Modus der relativen Koexistenz sich befinden können.

IV.4 Beziehungen zur mehrwertigen Logik

Wir wollen hier noch kurz darauf eingehen, inwiefern sich der dargestellte Modalkalkül als eine mehrwertige Logik im Sinne von LUKASIEWICZ, TARSKI u. a. auffassen läßt [18, 19, 20]. (Vgl. dazu auch [21, 22, 23].) Das in (IV.21) formulierte „quartum non datur“

$$\Delta_w A \vee \Delta_w \neg A \vee (\nabla_w A \wedge \nabla_w \neg A) \quad (\text{IV.26})$$

legt den Gedanken nahe, die folgenden drei Wahrheitswerte einzuführen:

1	für ΔA	A ist „wahr“,
$\frac{1}{2}$	für $\nabla A \wedge \nabla \neg A$	A ist „unbestimmt“
0	für $\Delta \neg A$	A ist „falsch“.

(IV.27)

Man könnte daher in einem zunächst noch nicht näher präzisierten Sinne den dargestellten Modalkalkül als eine dreiwertige Logik bezeichnen, in der neben den aus der zweiwertigen Logik bekannten Wahrheitswerten 0 und 1 noch der Wert $\frac{1}{2}$ vorkommt. Zunächst ist klar, daß (IV.27) eine Einteilung der Aussagen A in drei disjunkte Klassen liefert, denn es gilt wegen (IV.13) und (IV.22):

$$\Delta_w A \wedge \Delta_w \neg A \Rightarrow \perp \quad (\text{IV.28})$$

$$\Delta_w A \wedge (\nabla_w A \wedge \nabla_w \neg A) \Rightarrow \perp, \quad (\text{IV.29})$$

$$\Delta_w \neg A \wedge (\nabla_w A \wedge \nabla_w \neg A) \Rightarrow \perp. \quad (\text{IV.30})$$

Dagegen wird durch die Einteilung (IV.27) nicht bewirkt, daß der quantenlogische Modalkalkül als ein eigentliches Wahrheitswertsystem (im Sinne von O. BECKER [16]) interpretiert werden kann, in dem jede Aussage C , die mit Hilfe von \wedge , \vee und \neg aus den Aussagen A und B zusammengesetzt ist, genau einer der drei Wahrheitswerte zugeordnet werden kann, der durch die Wahrheitswerte von A und B eindeutig festgelegt ist.¹⁾ (Vgl. dazu [20].) Das ist jedoch bereits für den statistisch begründeten Modalkalkül $S2$ red [16] sowie für den nur unwesentlich davon verschiedenen klassisch-operativ begründeten Modalkalkül [6] nicht der Fall. Stellt man nämlich die Wahrheitswertmatrizen (IV.31) für \wedge und \vee auf,

¹⁾ Dies ist z. B. bei dem LUKASIEWICZ-TARSKI-Kalkül [18, 19] der Fall, für den jedoch bisher keine befriedigende Interpretation bekannt ist.

so zeigt sich [16], daß es nicht möglich ist, auf Grund der genannten Kalküle den Wahrheitswert der zu $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ gehörigen Mittelfelder eindeutig festzulegen.

\wedge	0	$\frac{1}{2}$	1	\vee	0	$\frac{1}{2}$	1	
0	0	0	0	0	0	$\frac{1}{2}$	1	
$\frac{1}{2}$	0	$[0, \frac{1}{2}]$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$[\frac{1}{2}, 1]$	1	(IV.31)
1	0	$\frac{1}{2}$	1	1	1	1	1	

$[0, \frac{1}{2}]$ soll dabei z. B. heißen, daß der Wahrheitswert sowohl 0 als auch $\frac{1}{2}$ sein kann.

Im quantenlogischen Modalkalkül, in dem im Gegensatz zu dem klassisch-operativen Modalkalkül die Regel

$$A \wedge B \vdash C \Rightarrow A \vdash B \rightarrow C$$

nicht mehr allgemein gilt, lassen sich auch die zu $(\frac{1}{2}, 1)$, $(1, \frac{1}{2})$ bzw. $(\frac{1}{2}, 0)$: $(0, \frac{1}{2})$ gehörigen Wahrheitswerte in den Matrizen für \wedge bzw. \vee nicht mehr eindeutig bestimmen. An Stelle von (IV.31) erhält man hier die folgenden Matrizen:

\wedge	0	$\frac{1}{2}$	1	\vee	0	$\frac{1}{2}$	1	
0	0	0	0	0	0	$[\frac{1}{2}, 1]$	1	
$\frac{1}{2}$	0	$[0, \frac{1}{2}]$	$[\frac{1}{2}, 1]$	$\frac{1}{2}$	$[\frac{1}{2}, 1]$	$[\frac{1}{2}, 1]$	1	(IV.32)
1	0	$[0, \frac{1}{2}]$	1	1	1	1	1	

Die Unbestimmtheiten der $(1, \frac{1}{2})$ bzw. $(\frac{1}{2}, 0)$ -Felder in der Matrix für \wedge bzw. \vee kann man sich leicht an Beispielen in einem dreidimensionalen Zustandsraum klarmachen. (Vgl. Bild 1 und 2.)¹⁾

In Bild 1 ist nämlich bezüglich $|f\rangle: \triangle A, \square B \wedge \neg \neg B$ sowie $\triangle \neg(A \wedge B)$ und bezüglich $|f'\rangle: \triangle A, \square B \wedge \square \neg B$ sowie $\square(A \wedge B) \wedge \square \neg(A \wedge B)$. Weiter ist in Bild 1 bezüglich $|g\rangle: \triangle \neg A, \square B \wedge \neg \neg B$ sowie $\triangle(A \vee B) \wedge \neg \neg(A \vee B)$ während in Bild 2 bezüglich $|f\rangle$ gilt: $\triangle \neg A, \square B \wedge \square \neg B$ sowie $\square(A \vee B) \wedge \square \neg(A \vee B)$. Dagegen kann der dritte Wahrheitswert — also in der \wedge -Matrix der Wert 1 in $(1, \frac{1}{2})$ und in der \vee -Matrix der Wert 0 in $(\frac{1}{2}, 0)$ — auf Grund des quantenlogischen Modalkalküls nicht vorkommen. Auf den Beweis sowie auf die einfachen Beweise für die Wahrheitswerte der übrigen Elemente der \wedge und \vee -Matrizen wollen wir nicht weiter eingehen.

Der quantenlogische Modalkalkül ist daher noch weniger als der klassische Modalkalkül als eine dreiwertige Logik im Sinne von LUKASIEWICZ anzusprechen. Höchstens in bezug auf die Möglichkeit, drei disjunkte Klassen (IV.27) einzuführen, die die Bedingung (IV.26) erfüllen, könnte man in einem verallgemeinerten Sinne von einer dreiwertigen Theorie sprechen.

) M_A bzw. M_B sollen die zu A bzw. B gehörigen abgeschlossenen Linearmanigfaltigkeiten bedeuten, auf die die Operatoren P_A bzw. P_B projizieren.

Während so weder der klassische noch der quantenlogische Modalkalkül ein eigentliches dreiwertiges Wahrheitswertsystem darstellt, unterscheiden sich von einem prinzipiellen Gesichtspunkt beide Kalküle sehr wesentlich. Zu jedem klassischen Kalkül kann man wegen (IV.25) ein vollständiges Wissen W_0 konstruieren, derart, daß wegen (IV.16) für jede Aussage A relativ zu W_0 entweder A oder $\neg A$ gilt. Damit aber verschwindet die Dreiwertigkeit im Sinne von (IV.27). Die Mehrwertigkeit der klassischen Modalkalküls wird also nur durch eine zufällige Unvollständigkeit des zugrunde gelegten Wissens vorgetäuscht, die sich wenigstens prinzipiell stets dadurch beseitigen läßt, daß man alle Aussagen auf ein vollständiges Wissen im Sinne von (IV.16) bezieht.

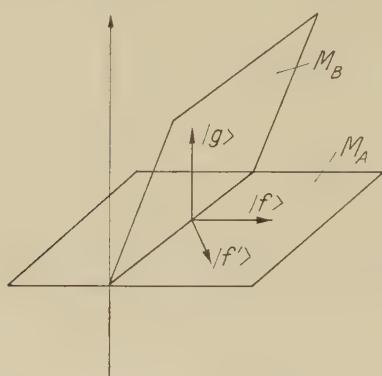


Bild 1

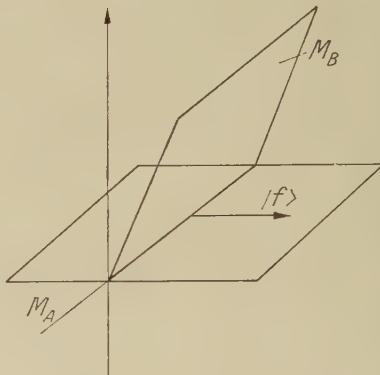


Bild 2

Demgegenüber ist im quantenlogischen Modalkalkül die verallgemeinerte Mehrwertigkeit (IV.27) eine wesentliche Eigenschaft, denn hier ist es grundsätzlich niemals möglich, ein so vollständiges Wissen W_0 einzuführen, daß alle Aussagen A objektiv in bezug auf W_0 sind. Im quantenlogischen Modalkalkül ist daher im Gegensatz zu den klassischen Modalkalkülen sowohl die Verwendung der Modi „möglich“ und „notwendig“ als auch die verallgemeinerte Mehrwertigkeit im Sinne von (IV.27) prinzipiell unvermeidlich.

Anhang: Kalküle und Logik

Es soll hier kurz die Frage besprochen werden, in welchem Sinne sich die Anwendung der klassischen Logik auf Aussagen eines Kalküls rechtfertigen läßt.¹⁾ Unter einem Kalkül K verstehen wir dabei ein System von Regeln $R_1 \dots R_N$ für Konstruktion von Figuren, die wir in der Form $a \rightarrow b$ bzw. $a, b \rightarrow c$ schreiben, und einige Anfangsfiguren $A_1 \dots A_K$. „ $a \rightarrow b$ “ soll besagen, daß, wenn die Figur a aus den Figuren $A_1 \dots A_K$ mit Hilfe der Regeln $R_1 \dots R_N$ hergestellt ist, dann auch b hergestellt werden kann. „ $a, b \rightarrow c$ “ soll bedeuten, daß, wenn die Figuren a und b schon hergestellt sind, dann c herzustellen ist. Die verschiedenen Schritte, die zur Konstruktion einer bestimmten Figur a erforderlich sind, wollen wir uns im folgenden stets in der Form eines aus mehreren Zeilen bestehenden Schemas aufgeschrieben denken, wobei in jeder Zeile nur genau ein

¹⁾ Eine ausführliche Darstellung dieses Problems findet sich bei LORENZEN [6].

Schritt aufgezeichnet sein soll. Ein solches Schema, dessen letzte Zeile aus der zu konstruierenden Figur a besteht, wollen wir eine Ableitung α und a deren Endaussage $a = \varepsilon(\alpha)$ nennen.¹⁾

Für die folgenden Untersuchungen ist die Frage von Bedeutung: ob eine beliebige Regel R , die nicht unter den Kalkülregeln $R_1 \dots R_N$ vorkommt, auch angewandt werden darf. Damit ist gemeint, daß man mit Hilfe dieser Regel R keine Aussage ableiten kann, die man nicht auch schon vorher ohne diese Regel R , also allein mit den Kalkülregeln $R_1 \dots R_N$ ableiten konnte. Formal heißt das, daß man jede Ableitung, die von der Regel R Gebrauch macht, unter Beibehaltung der Endaussage durch eine andere Ableitung ersetzen kann, in der R nicht vorkommt. Man bezeichnet dann eine solche Regel als zulässig in K oder als eliminierbar. Wie die Eliminierbarkeit im einzelnen nachgewiesen werden kann, soll hier nicht untersucht werden. Die verschiedenen Verfahren, mit denen dies möglich ist, werden in der sogenannten Protologik behandelt [6]. Es ist wichtig, im Auge zu behalten, daß alle in der Protologik diskutierten Eliminationsverfahren von der Vorstellung ausgehen, daß es sich dabei um eine materielle Konstruktion von Figuren (z. B. aus Steinchen) handelt, deren Herstellung keinen anderen als den durch die Regeln des Kalküls festgelegten Einschränkungen unterworfen ist.

Außer den Kalkülen kann man noch „Metakalküle“ untersuchen, deren Aussagen die Regeln der oben besprochenen Kalküle sind. Als „Metaregel“ bezeichnet man daher eine Regel über Regeln z. B. $a \rightarrow b \Rightarrow c \rightarrow d$.²⁾ Der einfache Pfeil ist hier eine bedeutungsfreie Figur, während „ \Rightarrow “ jetzt genau die Bedeutung hat, die „ \rightarrow “ in Kalkülen hatte. Diese Metaregel besagt also: Ist die Regel $(a \rightarrow b)$ zulässig in einem Kalkül K , so ist auch die Regel $(c \rightarrow d)$ zulässig. Entsprechend heißt eine Metaregel zulässig, wenn sie angewandt auf zulässige Regeln von K stets wieder zulässige Regeln liefert. Ebenso kann man fortschreitend „Metametalkalküle“ usw. untersuchen. Als gemeinsamen Namen für Aussagen, Regeln usw. gebrauchen wir jetzt auch den Terminus Aussagen und verwenden A, B, C als Variable für Aussagen.

Zur Vereinfachung des Ableitens in Kalkülen führt man noch einige weitere Figuren durch sogenannte relativ zulässige Regeln ein. Ein Beispiel ist die Regel \wedge , durch die das Zeichen \wedge (und), die Konjunktion, eingeführt wird:

$$(R_\wedge) \quad A, B \rightarrow A \wedge B.$$

Diese Regel ist sicher nicht zulässig, denn $A \wedge B$ ist jetzt unter Umständen bleitbar, während dies vorher bestimmt nicht der Fall war, wenn man annimmt, daß \wedge kein Zeichen des Kalküls ist. Dagegen ist (R_\wedge) relativ zulässig. Damit ist gemeint, daß in jeder Ableitung, in deren Endaussage das Zeichen \wedge nicht vorkommt, die Regel R_\wedge eliminiert werden kann.

Ebenso läßt sich die Disjunktion \vee (oder) durch die beiden, relativ zulässigen Regeln

$$A \rightarrow A \vee B,$$

$$B \rightarrow A \vee B$$

In Anlehnung an den üblichen Sprachgebrauch wollen wir auch sonst an Stelle von „Figur“ den Terminus „Aussage“ verwenden.

Häufig schreibt man statt der Punkte über dem Pfeil auch einfach Klammern im üblichen inne, also im obigen Beispiel: $(a \rightarrow b) \rightarrow (c \rightarrow d)$.

einführen. Ersichtlich wird durch die Verwendung der so eingeführten Zeichen \wedge und \vee nichts Neues gewonnen; jedoch läßt sich die unten diskutierte Logik mit Hilfe von \wedge und \vee etwas durchsichtiger formulieren.

Während die Begriffe „und“ und „oder“ sich durch relativ zulässige Regeln in die Kalküle einführen lassen, wird die Negation $\neg A$ (nicht A) einer Aussage A , auf deren ausführliche Diskussion wir hier nicht eingehen können [6, 12], durch eine Definition eingeführt. Wir wollen hier von der in der Formalisierung der intuitionistischen Logik verwendeten Negation ausgehen, die $\neg A$ durch „ A impliziert einen Widerspruch“ definiert, also

$$\neg A \Leftrightarrow A \rightarrow \perp$$

schreibt, wobei unter A („das Falsche“) eine Aussage gemeint ist, für die sämtliche Regeln $A \rightarrow A$ (für beliebiges A) zulässig sind. Analog dazu verwenden wir auch noch die Aussage V („das Wahre“), für die alle Regeln $A \rightarrow V$ zulässig sind.

Nachdem wir so die Kalküle durch die Zeichen \wedge , \vee , \neg erweitert haben, wollen wir fragen, ob es Regeln, Metaregeln usw. gibt, die in jedem Kalkül zulässig sind, und die wir daher als allgemein zulässig bezeichnen wollen. Ohne auf die Beweise einzugehen, sei hier vermerkt, daß sich die folgenden Regeln zu Ableitung von allgemein zulässigen Aussagen aufstellen lassen [6]:

- (1) $A \rightarrow A$
- (2) $A \rightarrow B, B \rightarrow C \Rightarrow A \rightarrow C$
- (3) $A \wedge B \rightarrow A$
- (4) $A \wedge B \rightarrow B$
- (5) $C \rightarrow A, C \rightarrow B \Rightarrow C \rightarrow A \wedge B$
- (6) $A \rightarrow A \vee B$
- (7) $B \rightarrow A \vee B$
- (8) $A \rightarrow C, B \rightarrow C \Rightarrow A \vee B \rightarrow C$
- (9) $A \wedge A \rightarrow B \Leftrightarrow B$
- (10) $A \wedge C \rightarrow B \Rightarrow C \Leftrightarrow A \rightarrow B$
- (11) $A \wedge \neg A \rightarrow \perp$
- (12) $A \wedge C \rightarrow A \Rightarrow C \rightarrow \neg A$

Während „ \rightarrow “ Bestandteil der Aussagen ist, haben wir hier „ \Rightarrow “ zur Mitteilung der Regeln (1–12) verwendet. $X \Rightarrow Y$ soll heißen: Ist X ableitbar, so auch Y . Das Komma zwischen zwei Aussagen bzw. Regeln (A, B) bedeutet hier wieder, daß sowohl A als auch B abgeleitet ist.

Die in (1–12) aufgeführten Regeln bezeichnet man als operative oder effektive Logik. Die Regeln der Logik sind also dadurch gekennzeichnet, daß man mit ihrer Hilfe keine Aussage, Regeln usw. herleiten kann, die nicht auch schon ohne Verwendung der logischen Regeln abgeleitet werden könnte. Damit ist aber die Anwendung der logischen Regeln (1–12) in jedem Kalkül gerechtfertigt.

Literatur

- [1] J. v. NEUMANN, Quantenmechanik, Berlin 1932.
- [2] G. BIRKHOFF u. J. v. NEUMANN, Ann. of Math. **37**, 823 (1936).
- [3] D. HILBERT, P. BERNAYS: Grundlagen d. Mathematik, Berlin 1934/39.
- [4] D. HILBERT, W. ACKERMANN: Grundzüge d. Theor. Logik, Berlin 1949.
- [5] TH. SKOLEM: Skrifter utgit av Videnskapsselskapet Kristiana **6**, (1923).
- [6] P. LORENZEN, Einführung in die operative Logik und Mathematik, Berlin 1955.
- [7] P. LORENZEN, Formale Logik, Berlin 1959.
- [8] P. MITTELSTAEDT, S.-B. Bayer. Akad. Wiss. **321**, (1959).
- [9] P. MITTELSTAEDT, Naturwissenschaft. **47**, 385 (1960).
- [10] C. F. v. WEIZSÄCKER, Naturwiss. **42**, 545 (1955).
- [11] C. F. v. WEIZSÄCKER, Z. f. Naturforschg. **13a**, 245, 704 (1958).
- [12] H. B. CURRY, Lecons de Logique Algébrique, Paris-Louvain 1952.
- [13] G. SÜSSMANN, Abh. Bayer. Akad. Wiss. **88** (1958).
- [14] H. KUNSEMÜLLER, Hamburger Diss. 1959.
- [15] N. BOHR: Dialectica **1**, 317 (1948).
- [16] O. BECKER, Untersuchungen über den Modalkalkül, Meisenheim 1952.
- [17] C. J. LEWIS, Langford, Symbolic Logic, New York 1932.
- [18] LUKASIEWICZ I., C. R. Séances Soc. Sci. Lettres Varsovie **10** (III), 51 (1930).
- [19] I. LUKASIEWICZ u. A. TARSKI, C. R. Séances Soc. Sci. Lettres Varsovie **10** (III), 30 (1930).
- [20] J. B. ROSSER u. A. R. TURQUETTE, Many valued logics, Amsterdam 1952.
- [21] H. REICHENBACH, Philosophische Grundlagen der Quantenmechanik, Basel 1949.
- [22] J. P. DESTOUCHES-FEVRIER, La structure des théories physique, Paris 1951.
- [23] W. D. E. BINK, Hamburger Dissertation.
- [24] E. RICHTER, unveröffentlicht.

Herausgeber: Prof. Dr. Rudolf Ritschl und Prof. Dr. Robert Rompe; Manuskripte sind zu richten an die Schriftleitung: Dr. E. A. Niekisch, II. Physikalisches Institut der Humboldt-Universität Berlin, Berlin N 4 Hes-
sische Str. 2. Verlag: Akademie-Verlag GmbH., Berlin W 8, Leipziger Str. 3–4, Fernruf: 220441, Telex-Nr. 011 773.
Postscheckkonto: — Berlin 35021. Die Zeitschrift „Fortschritte der Physik“ erscheint monatlich; Bezugspreis dieses
Doppelheftes DM 12,—. Bestellnummer dieses Heftes 1027/9/2–3. — Satz und Druck: Druckhaus „Maxim Gorki“,
Altenburg, Bez. Leipzig, Carl-von-Ossietzky-Str. 30–31. — Veröffentlicht unter der Lizenznummer ZLN 5028
des Ministeriums für Kultur. Printed in Germany.

Aus dem Inhalt der folgenden Hefte:

J. RANFT: Die Feinstruktur von Kerninduktionssignalen

- I. Die Theorie der magnetischen Abschirmkonstanten
- II. Die indirekte Kern-Spin-Spin-Kopplung
- III. Die Berechnung der Kerninduktionsspektren
- IV. Die Veränderung der Kerninduktionssignale durch Austauscherscheinungen und ähnliche Vorgänge

D. N. ZUBAREV: Zweizeitige Greensche Funktionen in der statistischen Physik
(Uspechi fiz. Nauk 71, 71, 1960)

GERHARD HEBER

**Vorlesungen
über ausgewählte Kapitel der Quantenfeldtheorie**

(Abhandlungen der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Klasse für
Mathematik, Physik und Technik, Jahrgang 1960, Heft 8)

1961. 60 Seiten — 4° — DM 6,50

Der Autor veröffentlicht Ausarbeitungen seiner Vorlesungen, die er im Herbst 1959 gehalten hat. Sie sollen dazu beitragen, die Schwierigkeiten der divergenten Selbstmassen und Selbstladungen in quantisierten Feldtheorien zu umgehen oder zu beseitigen.

Bestellungen durch eine Buchhandlung erbeten

AKADEMIE-VERLAG · BERLIN

FORTSCHRITTE DER PHYSIK

HERAUSGEGEBEN IM AUFTRAGE DER PHYSIKALISCHEN GESELLSCHAFT
IN DER DEUTSCHEN DEMOKRATISCHEN REPUBLIK

von Rudolf Ritschl und Robert Rompe

4. SONDERBAND

POLARONEN

Herausgeber: Prof. Dr. C. HÖHLER

Übersetzung aus dem Russischen

Deutsche Redaktion durch Dr. A. MÜLLENSIEFEN und Dr. E. A. NIEKISCH

1961. VI, 108 Seiten — 1 Abbildung — 3 Tabellen — DM 17,50

Inhaltsverzeichnis

N. N. BOGOLJUBOV:

Über eine neue Form der adiabatischen Störungstheorie beim Problem der Wechselwirkung eines Teilchens mit einem gequantelten Feld

S. V. TJABLIKOV:

Adiabatische Form der Störungstheorie beim Problem der Wechselwirkung eines Teilchens mit einem gequantelten Feld

S. V. TJABLIKOV:

Fragen der Translationsinvarianz in der Theorie der adiabatischen Näherung

S. V. TJABLIKOV:

Zur Theorie der Polaronen

S. V. TJABLIKOV:

Das Energiespektrum des Elektrons in einem polaren Kristall I

S. V. TJABLIKOV:

Das Energiespektrum eines Elektrons in einem polaren Kristall II

M. A. KRIVOGLAZ und S. I. PEKAR:

Die Zustandssumme für die Leitungselektronen in Halbleitern

I. Schwache Wechselwirkung der Elektronen mit den Gitterschwingungen

M. A. KRIVOGLAZ und S. I. PEKAR:

Die Zustandssumme für die Leitungselektronen in Halbleitern

II. Variationsverfahren

Bestellungen durch eine Buchhandlung erbeten

AKADEMIE-VERLAG · BERLIN